ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Миникурс А.Б. Скопенкова. По желанию студентов (выраженном в активном решении задач) миникурс может быть продолжен до спецкурса.

Аннотация спецкурса.

Будут изучаться важнейшие наглядные объекты математики: маломерные поверхности и векторные поля на них. Исследование векторных полей начал Анри Пуанкаре в качественной теории дифференциальных уравнений. Эта теория имеет приложения во многих областях естествознания. С тех пор векторные поля являются одним из важнейших объектов топологии, теории динамических систем и их приложений.

Основное содержание курса — демонстрация алгебраических идей теории гомологий на примере решения классических проблем о существовании и классификации векторных полей. Венец спецкурса — простое доказательство знаменитой теоремы Штифеля о параллелизуемости любого ориентируемого трехмерного многообразия.

Для изучения спецкурса достаточно знания основ математического анализа нескольких переменных. Определения трехмерных многообразий, а также векторных полей на них, будут даны. Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура. Для имеющих дополнительные знания будет предложен интересный дополнительный материал.

Большая часть материала изучается в виде домашнего решения задач с их последующим разбором. К задачам даются подробные указания. Каждая следующая лекция будет рассчитана на тех, кто решил большинство задач к предыдущим.

Примерная ПРОГРАММА миникурса (2 занятия)

0. ‘Похвальное слово векторным полям’ (Д.В. Аносов).

1. Векторные поля на двумерных поверхностях. Критерий Эйлера-Пуанкаре существования ненулевого касательного векторного поля на двумерной поверхности.

2. Классификация ненулевых касательных векторных полей на торе.

3.* Нормальные векторные поля на двумерных поверхностях. Существование ненулевого нормального векторного поля на ориентируемой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^4$.

Примерная ПРОГРАММА дальнейшего спецкурса

4. Гомологии двумерных многообразий. Форма пересечений. Ее невырожденность. Связь с векторными полями.

5. Теорема Хопфа о существовании ненулевого касательного векторного поля на любом трехмерном многообразии. Критерий Хопфа существования ненулевого касательного векторного поля для многомерных многообразий.

6.* Нормальные векторные поля для трехмерных многообразий.

7.* Гомологический инвариант векторных полей на трехмерных многообразиях. Гомотопическая классификация таких полей. Современные приложения к ядерной физике.

8. Ориентируемость трехмерных многообразий.

9. Существование ортонормированных систем векторных полей. Характеристические классы для трехмерных многообразий.

10. Гомологий трехмерных многообразий. Форма пересечений. Ее невырожденность.

11. Простое доказательство теоремы Штифеля о параллелизуемости любого ориентируемого трехмерного многообразия.

12.* Степени двойки, алгебры с делением и невложимость n-мерных многообразий. Связь вложимости n-мерного многообразия и двоичного разложения числа n.

Литература

В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, Москва, МЦНМО, 2004. `http://www.mccme.ru/prasolov`

А.Б. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2015. `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`.