ВЗРОСЛАЯ МАТЕМАТИКА ВОКРУГ ДЕТСКИХ РИСУНКОВ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ, ПОСВЯЩЕННАЯ 65-ЛЕТИЮ Г.Б. ШАБАТА

25 мая 2017 года, Москва, НМУ, конференц-зал

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Николай Адрианов
МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет

4-реберные рисунки рода 2 и кривые в пространстве Гурвица. Функции Белого детских рисунков рода 2 с 4 ребрами были вычислены в совместной работе с Г.Б.Шабатом в 2005 году. Эти детские рисунки обладают свойством самодвойственности, что в терминах пар Белого (X, β) означает, что кривая X – биэллиптична, функция Белого степени 8 имеет единственный ноль и единственный полюс, а также удовлетворяет функциональному уравнению $\beta^{-1} = \beta \circ \tau$, где τ – биэллиптическая инволюция. Если отказаться от ограничения на количество критических значений, то мы получим поверхность в пространстве Гурвица, на которой лежит несколько кривых, соответствующих парам Фрида, которые обладают указанными свойствами. В докладе будет рассказано о вычислениях этих семейств, проведенных вместе с Г.Б.Шабатом.

Наталья Амбург
НИЦ «Курчатовский институт» — ИТЭФ

Многочлен Пуанкаре пространства $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}(\mathbb{C})$ и количество точек пространства $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}(\mathbb{F}_q)$. Пространство Гурвица $\mathcal{H}_{0;k_1,\ldots,k_m}$ — это пространство мероморфных функций степени $k_1 + \ldots + k_m$ на алгебраической кривой рода 0 с кратностями прообразов $k_1, \ldots, k_n$ точки ∞ и нулевой суммой конечных критических значений. Пространство Гурвица стратифицировано кратностями прообразов вырожденных критических значений. Я расскажу о способе вычисления степеней стратов пространства Гурвица и конкретных вычислениях степеней стратов маленьких коразмерностей. Например, степень самопересечения каустики — страта функций с двумя вырожденными критическими значениями с прообразами $1^{n-3}3^1$. Как следствие, мы получим замкнутые формулы для нескольких серий двойных чисел Гурвица и соотношения на производящие ряды для чисел пересечения ψ классов на пространстве модулей.

Доклад основан на совместных результатах с Е.М. Крейнес и Г.Б. Шабатом.

Борис Бычков
НИУ ВШЭ

Степени стратов пространства Гурвица. Пространство Гурвица $\mathcal{H}_{0;k_1,\ldots,k_m}$ — это пространство мероморфных функций степени $k_1 + \ldots + k_m$ на алгебраической кривой рода 0 с кратностями прообразов $k_1, \ldots, k_n$ точки ∞ и нулевой суммой конечных критических значений. Пространство Гурвица стратифицировано кратностями прообразов вырожденных критических значений. Я расскажу о способе вычисления степеней стратов пространства Гурвица и конкретных вычислениях степеней стратов маленьких коразмерностей. Например, степень самопересечения каустики — страта функций с двумя вырожденными критическими значениями с прообразами $1^{n-3}3^1$. Как следствие, мы получим замкнутые формулы для нескольких серий двойных чисел Гурвица и соотношения на производящие ряды для чисел пересечения ψ классов на пространстве модулей.

Александр Васин
МГУ имени М.В. Ломоносова, ф-т ВМК

Оптимизация транспортных систем энергетических рынков. Рынки природного газа, нефти и электроэнергии играют важную роль в экономике многих стран. Задача оптимизации транспортной системы представляет большой практический интерес. Рассматривается проблема оптимизации общественного благосостояния с учетом производственных затрат, полезности потребления и затрат на увеличение пропускных способностей. Сложность проблемы определяется наличием существенных фиксированных расходов, связанных с расширением линий передачи. В целом задача — NP-трудная (см. Guisewite, Pardalos, 1990). В нашей работе (Васин, Григорьева, Цыганов, 2017) вводятся понятия дополнительных и конкурентных транспортных линий. Для рынков с древовидной структурой указываются легко проверяемые необходимые и достаточные условия инвариантности структуры потоков, при выполнении которых любая пара линий с одинаковой ориентацией потоков является дополнительной, а с противоположной ориентацией — конкурентной. Указанные свойства позволяют разработать эффективные алгоритмы как для решения дискретной задачи поиска оптимального множества расширяемых линий, так и для вспомогательной задачи оптимизации благосостояния при заданном множестве расширяемых линий.

Константин Голубев
Университет Бар-Илана, Израиль

Хроматические числа Римановых поверхностей. Хроматическое число графа – это минимальное количество цветов, необходимое для раскраски вершин графа так, чтобы соседние вершины были окрашены в разные цвета. В отличие от многих других понятий (таких как случайные блуждания, расширение и др.) хроматическое число не имеет аналогов в теории Римановых поверхностей. Мы определяем хроматическое число Римановой поверхности как минимальное количество цветов, необходимое для раскраски точек поверхности так, чтобы точки на фиксированном расстоянии были окрашены в разные цвета. Удивительным образом такое хроматическое число растет экспоненциально как функция расстояния. Совместная работа с Эваном ДеКорте.

Петр Дунин-Барковский
НИУ ВШЭ

О гомологиях накрытий пространств модулей кривых. В докладе будет изложен результат совместной работы с А.В. Пополитовым, А.В. Слепцовым и Г.Б. Шабатом о гомологиях определенных конечнолистных накрытий пространств модулей алгебраических кривых с одной отмеченной точкой. Предложен явный способ построения клеточного комплекса для т.н. уровневых накрытий пространств модулей кривых; для случая рода 2 явно вычислены его числа Бетти.

Дмитрий Звонкин
Университет Пьера и Мари Кюри, Париж, Франция

О числах пересечения на пространстве модулей вещественных рациональных кривых. Пусть $M_{0,n}(\mathbb{R})$ – пространство модулей вещественных кривых рода 0 с n вещественными отмеченными точками. Это – гладкое вещественное многообразие размерности $n-3$, неориентируемое при $n > 4$. На этом многообразии имеется n линейных расслоений: кокасательных прямых к кривой в отмеченных точках. У каждого из этих расслоений есть первый класс Штифеля-Уитни: класс 1-когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Обозначим эти классы $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Для любых неотрицательных целых чисел $d_1, \ldots, d_n$ с суммой $n-3$ можно задаться вопросом, чему равно "число пересечения"

$$\xi_1^{d_1} \cdots \xi_n^{d_n}$$

– нулю или единице? Ответ на этот вопрос такой. Запишем числа $d_1, \ldots, d_n$ в двоичной системе и попробуем сложить их в столбик. Если при этом нам хоть раз придётся делать перенос в больший разряд (то есть, если в одном разряде хотя бы у двух чисел d_i одновременно стоит единичка), то ответ 0, а в противном случае – 1. Несмотря на интригующую форму ответа, доказать его очень просто; это было сделано в дипломной работе моего студента Малика Камара.

Юлий Ильяшенко
НИУ ВШЭ

Les dessins des autres enfants. Глобальная теория бифуркаций на плоскости — новый сюжет, основные результаты которого могут быть выражены в виде рисунков (разумеется, на плоскости). В докладе будет рассказано о первых шагах в исследовании этих бифуркаций, которые полностью опрокинули давние ожидания экспертов.

Виктор Куликов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Полугруппы накрытий и неприводимые компоненты пространств Гурвица. Пусть G – подгруппа симметрической группы $\mathbb{S}_d$ и $Hur_d(C, G, \sqcup_{i=1}^{n} O_i)$ – пространство Гурвица d-листных накрытий проективной кривой C рода

g, разветвленных в n точках $x_i \in C$, $i = 1, \ldots, n$, локальные монодромии μ_i накрытий в которых принадлежат классам сопряженности O_i группы G. В докладе будет рассказано, что неприводимые компоненты пространства $Hur_d(C, G, \sqcup_{i=1}^n O_i)$ естественным образом взаимно однозначно соответствуют элементам длины $n + 2g$ некоторой, так называемой, *полугруппы накрытий* $\mathcal{S}_g(G, \sqcup_{i=1}^n O_i)$ и число неприводимых компонент пространства $Hur_d(C, G, \sqcup_{i=1}^n O_i)$ зависит только от $\cup_{i=1}^n O_i$ (т.е. не зависит от d, n и g), если n достаточно велико и элементы из $\cup_{i=1}^n O_i$ порождают группу G.

Сергей Натанзон
НИУ ВШЭ

Клейновы пены. Клейновы пены — это аналоги римановых поверхностей с одномерными с обенностями. Эти структуры естественно возникают в современных моделях математической физики (теория струн, топологическая теория поля и др.) Клейнова пена получается склейкой нескольких кленовых поверхностей по отрезкам их границ. В докладе будет показано, что клейнова пена эквивалентна семейству вещественных форм римановой поверхности. Это позволяет найти неожиданные топологические и аналитические свойства клейновой пены. Кроме того будет построено пространство модулей клейновых пен одинакового топологического типа. Оказалось, что как и в случае римановых поверхностей оно представляется в виде фактора клетки по дискретной группе. Доклад основан на совместнаяых работах с С. М. Гусейн-Заде и А.Ф.Коста.

Дмитрий Оганесян
МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет

Семейства пар Фрида и редукция пар Белого в положительную характеристику. В докладе будет изложен подход к изучению пар Белого с помощью включения их в семейства функций. Парой Фрида будем называть пару из алгебраической кривой и рациональной функции на ней с 4 критическими значениями. Мы включим пары Белого в семейства пар Фрида. Будет рассмотрен ряд примеров такой деформации пар Белого для родов 0 и 1, и с их помощью мы получим результаты о редукции пар Белого в поля положительной характеристики. Так же в результате мы получим ряд красивых мегакарт и фунций Белого на них.

Сергей Смирнов
МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет

Системы, интегрируемые по Дарбу: пример двумеризованной цепочки Тоды. В теории интегрируемых систем, в зависимости от класса рассматриваемых задач, вводятся различные понятия интегрируемости. Например, когда речь идет о конечномерных динамических системах, то, как правило, говорят об *интегрируемости по Лиувиллю*; при изучении эволюционных уравнений под интегрируемостью обычно понимается *интегрируемость методом обратной* *задачи.* Я рассажу об *интегрируемых по Дарбу* системах — классе гиперболических систем, допускающих более или менее явное интегрирование. Простейшим примером такой системы является классическое *уравнение Лиувилля*

$$u_{xy} = e^u,$$

общее решение которого было найдено еще Ж. Лиувиллем в 1853 году. Менее тривиальным примером интегрируемой по Дарбу системы являются *двумеризованные цепочки Тоды* — системы, независимо возникшие в классической дифференциальной геометрии в конце 19 века и в теоретической физике почти век спустя. Я расскажу об одной очень простой конструкции, позволяющей строить характеристические интегралы как для двумеризованных цепочек Тоды, так и для их дискретных аналогов.

Leonid Chekhov
Steklov Mathematical Institute, Russia

Grothendieck's dessins d'enfant and matrix models. The technique of random matrix models turned out to be well suited for describing generating functions of numbers of Grothendieck's dessins d'enfant of a given structure. I describe some recent advances in this field and generalizations of these models to description of "hypergeometric Hurwitz numbers"corresponding to mappings $\Sigma_g \to CP^1$ branched over a fixed number of points in the projective plane.

Vladimir Gurvich
Rutgers University, NJ and National Research University, Higher School of Economics, Moscow, Russia

Dual graphs on surfaces. Consider an embedding of a graph G in a surface S (map). Assume that the difference splits into connected components (countries), each one homeomorphic to an open disk. (It follows from this assumption that graph G must be connected). Introduce a graph G* dual to G realizing the neighbor relations among countries. The graphs G and G* have the same set of edges. More precisely, there is a natural one-to-one correspondence between their edge-sets. An arbitrary pair of graphs with common set of edges is called a plan. Every map induces a plan. A plan is called geographic if it is induced by a map. In terms of Eulerian graphs we obtain criteria for a plan to be geographic. Partially, these results were announced by Vladimir Gurvich and George Shabat. Charts of Surfaces and their Schemes, Soviet Math. Dokl. 39:2 (1989) 390-394.

Alexander Guterman
Lomonosov Moscow State University, Russia

Permanent Pólya problem. Two important functions in matrix theory, determinant and permanent, look very similar:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad \text{and} \quad \operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

here $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ is an $n \times n$ matrix over a field $\mathbb{F}$ and S_n denotes the set of all permutations of the set $\{1, \ldots, n\}$.

While the computation of the determinant can be done in a polynomial time, it is still an open question, if there are such algorithms to compute the permanent. Due to this reason, starting from the work by Pólya, 1913, different approaches to convert the permanent into the determinant were under the intensive investigation.

We plan to give a short exposition of this theory during the past century including our recent research results. In particular, we prove that there are no bijective converters between permanent and determinant over finite fields. We also plan to provide sharp upper bounds for permanents of (1,-1)-matrices depending on their rank, which proves the Krauter conjecture (1985) answering the question by Wang (1974).

The talk is based on a series of joint works with Mikhail Budrevich, Gregor Dolinar, Bojan Kuzma and Marko Orel.

Gareth A. Jones
University of Southampton, UK

Doubly Hurwitz Beauville groups. A *Beauville surface* is a complex algebraic surface of general type, of the form $\mathcal{S} = (\mathcal{C}_i \times \mathcal{C}_2)/G$ where $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ are the Belyi curves underlying two regular dessins of genera $g_1, g_2 > 1$, which have the same automorphism G which acts freely on their product. (These surfaces were introduced by Beauville in 1978, and subsequently studied by algebraic geometers such as Catanese, along with Bauer and Grunewald.) The Hurwitz bound implies that $|G| \leq 1764\,\chi(\mathcal{S})$, with equality if and only if the *Beauville group* G acts as a Hurwitz group on both curves $\mathcal{C}_i$. Equivalently, G has two generating triples of type $(2, 3, 7)$, such that no generator in one triple is conjugate to a power of a generator in the other. In joint work with Emilio Pierro, and in answer to a question of Sasha Zvonkin, we show that this property is satisfied by all alternating groups of sufficiently large degree, together with their double covers, but by no sporadic simple groups or simple groups in various families of small Lie rank.

Elena Kreines
Lomonosov Moscow State University, Russia

Dessins d'enfants on reducible surfaces. Grothendieck dessins d'enfants are connected embedded graphs of certain special structure on smooth oriented compact surfaces without the boundary. They are naturally connected with so-called Belyi pairs, i.e., non-constant meromorphic functions with at most 3 critical values defined on algebraic curves. Generalized Grothendieck dessins d'enfants, are not necessary connected embedded graphs on not necessary smooth surfaces. Generalized Grothendieck dessins correspond to Belyi functions on reducible algebraic curves. We are going to formally introduce and investigate these notions and various types of relations between them: algebraic, geometric, category theory. We will discuss several applications (or even origins) of generalized dessins d'enfants.

The talk is based on joint works with N.Ya. Amburg and G.B. Shabat.

Alexander Mednykh
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Russia

Jacobian groups of circulant graphs. The notion of the Jacobian group of a graph, which is also known as the Picard group, the critical group, and the dollar or sandpile group, was independently introduced by many authors. We define Jacobian of a graph as the maximal Abelian group generated by the flows obeying two Kirchhoffs laws. This notion arises as a discrete version of the Jacobian in the classical theory of Riemann surfaces. It also admits a natural interpretation in various areas of physics, coding theory, and financial mathematics. The Jacobian group is an important algebraic invariant of a finite graph. In particular, its order coincides with the number of spanning trees of the graph, which is well known for some simplest graphs, such as the wheel, fan, prism, ladder, and Möbius ladder. At the same time, the structure of the Jacobian is known only in some particular cases. The class of circulant graphs is fairly large and includes the cyclic graphs, complete graphs, Möbius ladder, antiprisms, and other graphs. The purpose of this report is to determine the structure of the Jacobian for circulant graphs, the generalized Petersen graph, I-,Y-,H- graphs and some others. We also present new formulas for the number of spanning trees and investigate arithmetical properties of these numbers.

Gaiane Panina
POMI, St.Pb State University, Russia

Diagonal complexes. (Joint work with Joseph Gordon.) Generalizing a construction of J.L. Harer we introduce and study *diagonal complexes* related to a (possibly bordered) oriented surface F equipped with a number of labeled fixed points. Investigation of some natural forgetful maps combined with length assignment proves homotopy equivalence of some of the complexes to the space of metric ribbon graphs $RG_{g,n}^{met}$, to the (introduced by M. Kontsevich) tautological S^1-bundles L_i, to the Whitney sum of L_i, and to a more sophisticated bundle whose fibers are homeomorphic to some surgery of the surface F. As an application, we compute the powers of the first Chern class of L_i in combinatorial terms. The latter result is an application of N. Mnev and G. Sharygin local combinatorial formula.

George Shabat
Independent University of Moscow and Lomonosov Moscow State University, Russia

Half-century in mathematics. I will try to give an overview of my mathematical life, starting with the tribute to my teachers. Then I will briefly mention the domains in which I worked and which have (temporarily..?) abandoned: uniformization of complex algebraic varieties, automorphism groups of bounded domain of $\mathbb{C}^n$, applications of differential equations to algebraic geometry, non-archimedean discrete dynamics. Finally, I will concentrate on my current activities: dessins d'enfants theory and its relations to the moduli spaces of curves; I'll share my plans and dreams.