

Независимый Московский Университет, весна 2018
КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ
Примерная программа спецкурса

0. Общий обзор

- 0.0. Краткое историческое введение: от Ньютона и Римана до Вейля и Гротендика
- 0.1. Вложенные и абстрактные алгебраические многообразия
- 0.2. Дискретные и непрерывные инварианты алгебраических многообразий
- 0.3. (Ко)гомологии комплексных алгебраических многообразий
- 0.4. Распространение топологической интуиции за пределы очевидного

1. Необходимые алгебро-геометрические понятия

- 1.0. "Основное" поле и его расширения; степень трансцендентности
- 1.1. (Пред)схемы Гротендика
- 1.2. Проективные многообразия: неприводимость, размерность
- 1.4. Грассманианы; степень проективного многообразия
- 1.5. Нормальность и гладкость проективного многообразия
- 1.6. Произведения проективных многообразий
- 1.7. Соответствия и морфизмы
- 1.8. Бирациональные и бирегулярные изоморфизмы

2. Введение в комбинаторную топологию

- 2.0. Абстрактные симплициальные схемы и полиэдры
- 2.1. Гомологии симплициальных схем с коэффициентами в \mathbb{F}_2
- 2.2. Полиэдры и их симплициальные гомологии с коэффициентами в \mathbb{F}_2
- 2.3. Ориентация симплексов
- 2.4. Сингулярные гомологии с произвольными коэффициентами
- 2.5. Формула Кюннета
- 2.6. Гомологии как функтор
- 2.7. Эйлерова характеристика; формула Лефшетца

3. Аксиоматическое построение (ко)гомологических теорий

- 3.0. Гомологии и когомологии
- 3.1. Относительные (ко)гомологии
- 3.2. Точные последовательности в (ко)гомологических теориях
- 3.3. Гомотопическая эквивалентность
- 3.4. Барцентрический функтор
- 3.5. Связь относительных и абсолютных (ко)гомологий
- 3.6. Аксиомы Эйленберга-Стинрода

4. Когомологии гладких и комплексных многообразий

- 4.0. Размерность, связность
- 4.1. Ориентация и двойственность Пуанкаре
- 4.2. Классификация маломерных гладких многообразий
- 4.3. Несглаживаемые топологические многообразия
- 4.4. Когомологии де Рама
- 4.5. Разложение Ходжа

5. Когомологии Чеха

- 5.0. Покрытия и их нервы
- 5.1. Размерность Лебега; покрытия Лере
- 5.2. Когомологии Чеха, привязанные к покрытию
- 5.3. Предел по измельчающимся покрытиям
- 5.4. Когомологии Чеха и сингулярные когомологии

- 6. Когомологии с коэффициентами в пучках**
 - 6.0. Предпучки и пучки
 - 6.1. Аддитивные и абелевы категории
 - 6.2. Обобщение чеховских когомологий
 - 6.3. Резольвенты и производные функторы
 - 6.4. Отступление: когомологии групп и асферических пространств
 - 6.5. Вялые, мягкие, тонкие пучки
 - 6.6. Сравнение когомологических теорий
- 7. Алгебраические когерентные пучки**
 - 7.0. Квазикогерентные и когерентные пучки
 - 7.1. Теоремы Серра
 - 7.2. Группы Пикара
 - 7.3. GAGA
 - 7.4. Двойственность Серра; изоморфизм Дольбо
 - 7.5. Теорема Римана-Роха-Хирцебруха
 - 7.6. Обильные и очень обильные обратимые пучки
 - 7.7. Полные и проективные многообразия
- 8. Этальные когомологии**
 - 8.0. Недостатки топологии Зариского
 - 8.1. Топология Гротендика
 - 8.2. Этальные когомологии; теоремы сравнения
 - 8.3. ℓ -адические когомологии
 - 8.4. Гипотезы Вейля
- 9. Когомологии кривых и поверхностей**
 - 9.0. Род кривой и числа Бетти, Ходжа, Чженя поверхностей
 - 9.1. Пространства модулей кривых и их когомологии
 - 9.2. *География* поверхностей; теорема Гизекера
 - 9.3. Неравенства Нётера и Богомолова-Мияоки-Яу
 - 9.4. Фальшивые проективные плоскости
 - 9.5. Открытые вопросы классификации поверхностей
- 10. Структуры в когомологиях алгебраических многообразий**
 - 10.0. Окончательны ли современные теории? Мечты о *мотивах* (Гротендик, ...)
 - 10.1. Структуры Ходжа
 - 10.2. Теоремы типа Торелли
 - 10.3. Модули Тейта
 - 10.4. О гомотопической топологии алгебраических многообразий (Воеводский, ...)