

Топологическая гипотеза Тверберга: комбинаторика, алгебра и топология

Аркадий Борисович Скопенков

Курс относится к теории гиперграфов — бурно развивающемуся разделу математики, возникшему на стыке комбинаторики, геометрии, топологии и программирования.

Теорема Радона. *Любые 4 точки плоскости можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Теорему Радона обобщает **теорема Тверберга:** *любые $3r - 2$ точки плоскости можно разбить на r множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.*

Топологическая теорема Радона. *Для любого непрерывного отображения тетраэдра в плоскость либо образ некоторой вершины лежит на образе противоположной грани, либо образы некоторых противоположных ребер пересекаются.*

Эти теоремы можно обобщить и на d -мерное евклидово пространство \mathbb{R}^d . Легко сообразить, как сформулировать ‘топологическую теорему Тверберга’ для \mathbb{R}^d . Последняя доказана в случае, когда r — степень простого. Контрпримеры для других r получены в 2015 году. Доказательство этих результатов — пример красивого и плодотворного взаимодействия комбинаторики, алгебры и топологии.

Будет приведено упрощенное изложение указанных результатов. Основные идеи будут представлены на ‘олимпиадных’ примерах: размерности не выше 3, на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму научного языка. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты.

Литература

- [S] А. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algorg.pdf>
- [S15] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2015. <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.
- [S16] A. Skopenkov, A user’s guide to disproof of topological Tverberg Conjecture, <http://arxiv.org/pdf/1605.05141.pdf>

Примерная программа

1. Теоремы Радона и Тверберга. [S, §1.3.1 ‘Линейные теоремы Радона и Тверберга’]
2. Топологическая теорема Радона. [S, §1.3.2, §1.3.3, ‘Топологическая теорема Радона (для плоскости)’]
3. Топологическая гипотеза Тверберга. Почти r -вложения. Редукция Громова топологической гипотезы Тверберга к обобщенной теореме Ван Кампена-Флореса. [S, §1.3.4 ‘Топологическая гипотеза Тверберга’] [S16, §1, §4]
- 4.* Редукции топологической гипотезы Тверберга (к маломерным остовам и к ‘крайней’ размерности). [S, §1.3.4 ‘Топологическая гипотеза Тверберга’], [S16, §3]
5. Индекс пересечения. Доказательства леммы о четности и теоремы Жордана. [S15, §1]
6. Почти вложения и почти вложения по модулю 2 для графов в плоскости. Полиномиальный алгоритм распознавания планарности. [S, §3.1, §3.2 ‘Отображения графов в плоскость’, ‘Алгоритм ван Кампена распознавания планарности графов’]
- 7.* \mathbb{Z} -почти вложения. \mathbb{Z} -почти r -вложения. План доказательства контрпримера к топологической гипотезе Тверберга в случае, когда r — не степень простого. [S, §3.3 ‘Обобщения препятствия ван Кампена’] [S16, §3]
- 8.* Обобщения теоремы Борсука-Улама. Конфигурационные пространства. Доказательство топологической теоремы Тверберга в случае, когда r — степень простого. [S16, §2].