

Листок 4

1. Пусть A оператор в векторном пространстве V размерности n . Пусть m такое число, что $A^m = 0$, но $A^{m-1} \neq 0$. Какие значения может принимать m ?
2. Определим след $\operatorname{tr}A$ оператора $A \in \operatorname{End}(V)$ как сумму диагональных элементов матрицы A в некотором базисе. Докажите, что $\operatorname{tr}A$ не зависит от выбора базиса.
3. Найдите все такие $A \in \operatorname{End}V$, что A коммутирует со всеми элементами из $\operatorname{End}V$.
4. Найдите матрицу оператора A^n , $n \in \mathbb{Z}$, если матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

5. Пусть $G \subset \operatorname{End}V$ порождает $\operatorname{End}V$ в том смысле, что всякий эндоморфизм пространства V представим в виде линейной комбинации произведений некоторого числа элементов из G . Какое минимальное число элементов может быть в G ?
6. Найдите все степени матриц

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}.$$