

# Листок 7

1. Пусть  $V$  – конечномерное пространство,  $\dim V = n$ . Постройте изоморфизм  $\Lambda^i V^* \simeq (\Lambda^{n-i} V^*)^*$  при всех  $0 \leq i \leq n$ .
2. Пусть  $D : \text{End}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D(AB) = D(A)D(B)$ ,  $D(\lambda \cdot \text{Id}) = \lambda^n$ . Тогда  $D = \det$ .
3. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  – базис  $V^*$ ,  $e_1, e_2, e_3$  – двойственный базис  $V$ . Вычислите  $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)$ .
4. Пусть  $A \in \text{End} V$ ,  $A^* : T^k(V^*) \rightarrow T^k(V^*)$  – индуцированный оператор. Предположим, что  $A$  записывается в некотором базисе диагональной матрицей с числами  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  на диагонали. Вычислите след  $A^*$ , а также следы ограничения  $A^*$  на пространства симметрических и внешних форм.
5. Пусть оператор  $A^* \in \text{End} V^*$  в базисе  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , записывается матрицей  $(a_{i,j})$ . Найдите матрицу оператора  $A^* : T^k(V^*) \rightarrow T^k(V^*)$  в базисе, состоящем из тензорных произведений векторов  $\xi_i$ , и вычислите её определитель.
6. Пусть  $\dim V = n$  и  $(f_i)_{i=1}^n, (g_j)_{j=1}^n$  – два базиса  $V^*$ . Найдите такое число  $c$ , что  $f_1 \wedge \dots \wedge f_n = c g_1 \wedge \dots \wedge g_n$ .