

§7. Двойственность

7.1. Двойственное пространство. Линейное отображение $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ из векторного пространства над полем \mathbb{k} в само это поле¹ называется *ковектором*² на пространстве V . Ковекторы образуют векторное пространство, которое обозначается $V^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$ и называется *двойственным* (или *сопряжённым*) к V пространством.

Пример 7.1 (функционалы вычисления)

Пусть X — произвольное множество, и $V = \mathbb{k}^X$ — пространство всех функций на X со значениями в поле \mathbb{k} , как в [прим. 6.7](#) на стр. 86. С каждой точкой $p \in X$ связан функционал вычисления $ev_p : V \rightarrow \mathbb{k}$, переводящий функцию $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ в её значение $f(p) \in \mathbb{k}$.

Упражнение 7.1. Убедитесь, что отображение ev_p линейно, и покажите, что для конечного множества X функционалы вычисления ev_p , где p пробегает X , составляют базис пространства, двойственного к пространству функций на X .

Пример 7.2 (координатные функционалы)

Каждому базису $\{e_i\}$ пространства V отвечает набор *координатных функционалов* $e_i^* \in V^*$. Функционал e_i^* сопоставляет вектору $v = \sum x_i e_i \in V$ значение i -той координаты этого вектора: $e_i^* : x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \mapsto x_i$. В частности, значения функционала e_i^* на базисных векторах e_j суть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i \end{cases} \quad (7-1)$$

Упражнение 7.2. Убедитесь, что все отображения $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{k}$ линейны.

Предложение 7.1

Координатные функционалы любого базиса пространства V линейно независимы в V^* . Если пространство V конечномерно, то они составляют базис пространства V^* . В частности, $\dim V = \dim V^*$.

Доказательство. Пусть в V^* имеется конечная линейная комбинация

$$\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0.$$

Вычисляя обе части на базисном векторе e_i , получаем, что $\lambda_i = 0$ для всех i . Второе утверждение вытекает из того, что каждый функционал φ на пространстве V с базисом e_1, e_2, \dots, e_n линейно выражается через функционалы e_i^* по формуле

$$\varphi = \varphi(e_1) e_1^* + \varphi(e_2) e_2^* + \dots + \varphi(e_n) e_n^*,$$

поскольку обе части этого равенства принимают одинаковое значение $\varphi(e_i)$ на каждом базисном векторе $e_i \in V$. □

Определение 7.1

Базисы $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in V$ и $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*) \in V^*$ называются *двойственными базисами* конечномерных пространств V и V^* .

¹рассматриваемое как одномерное векторное пространство над собой

²а также *линейной формой* или *линейным функционалом*

7.1.1. Канонический изоморфизм $V \simeq V^{}$.** Конечномерные пространства V и V^* играют по отношению друг к другу абсолютно симметричные роли. А именно, каждый вектор $v \in V$ может рассматриваться как *функционал вычисления* на пространстве V^* , переводящий линейные формы в их значения на векторе v :

$$ev_v : V^* \rightarrow \mathbb{k}, \quad \varphi \mapsto \varphi(v).$$

Поскольку число $\varphi(v) \in \mathbb{k}$ линейно зависит как от v , так и от φ , сопоставление вектору v функционала вычисления ev_v задаёт *каноническое*¹ линейное отображение

$$ev : V \rightarrow V^{**}, \quad v \mapsto ev_v, \quad (7-2)$$

Упражнение 7.3. Убедитесь, что отображение (7-2) переводит любой базис e_1, e_2, \dots, e_n пространства V в базис пространства V^{**} , двойственный к базису $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ пространства V^* .

Упражнение показывает, что отображение (7-2) является *изоморфизмом*. Это означает, что каждая линейная форма $\Phi : V^* \rightarrow \mathbb{k}$ на пространстве V^* является функционалом вычисления значения на некотором векторе $v \in V$, однозначно определяемым формой Φ , а любой базис $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ пространства V^* является набором координатных форм e_i^* для единственного базиса² $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$.

Упражнение 7.4. Пусть $\dim V = n$ и наборы $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in V^*$ таковы, что $\varphi_i(v_i) = 1$ и $\varphi_i(v_j) = 0$ при $i \neq j$. Покажите, что

- оба набора являются базисами
- любой вектор v выражается через векторы v_i с коэффициентами $\varphi_i(v)$.

Пример 7.3 (формула Лагранжа)

Зафиксируем $n+1$ различных чисел $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ и рассмотрим на пространстве многочленов степени не выше n функционалы вычисления $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, сопоставляющие многочлену f его значения $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)$ в точках $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$. Многочлен

$$f_i(x) = \prod_{v \neq i} (x - a_v)$$

имеет степень n и обращается в нуль во всех точках a_v , кроме точки a_i , где его значение отлично от нуля. Стало быть, многочлены $v_i(x) = f_i(x)/f_i(a_i)$ и формы φ_i удовлетворяют условию [упр. 7.4](#) и являются двойственными друг другу базисами, а разложение произвольного многочлена $g(x) \in \mathbb{k}[x]_{\leq n}$ по базису v_0, v_1, \dots, v_n имеет вид

$$g(x) = \sum_{i=0}^m g(a_i) \cdot v_i(x) = \sum_{i=0}^m g(a_i) \cdot \frac{\prod_{v \neq i} (x - a_v)}{\prod_{v \neq i} (a_i - a_v)}. \quad (7-3)$$

Таким образом, для любого наперёд заданного набора значений $g_0, g_1, \dots, g_n \in \mathbb{k}$ эта формула задаёт *единственный* многочлен $g \in \mathbb{k}[x]_{\leq n}$, принимающий значения $g(a_i) = g_i$ при всех i . Формула (7-3) называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

¹т. е. не прибегающее к фиксации каких-либо дополнительных данных вроде базиса

²а именно, для двойственного к $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ базиса в $V^{**} = V$

Пример 7.4 (формула Тейлора)

Пусть поле \mathbb{k} имеет характеристику нуль¹. Зафиксируем $a \in \mathbb{k}$ и рассмотрим на пространстве многочленов степени не выше n функционалы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, сопоставляющие многочлену f его значение и значения первых n его производных в точке a :

$$f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a).$$

Многочлены $v_k = (x - a)^k/k!$ и формы φ_k удовлетворяют условию [упр. 7.4](#), а значит, являются двойственными друг другу базисами, и произвольный многочлен $g(x) \in \mathbb{k}[x]_{\leq n}$ обладает единственным разложением

$$g(x) = g(a) + g'(a) \cdot (x - a) + g''(a) \cdot \frac{(x - a)^2}{2} + \dots + g^{(n)}(a) \cdot \frac{(x - a)^n}{n!}, \quad (7-4)$$

которое называется *разложением Тэйлора* многочлена g в точке a .

7.1.2. Свёртка. Будем называть *свёрткой* (или *спариванием*) между векторными пространствами V и W отображение

$$V \times W \rightarrow \mathbb{k}, \quad v, w \mapsto \langle v, w \rangle, \quad (7-5)$$

сопоставляющее каждой паре векторов $v \in V, w \in W$ число $\langle v, w \rangle \in \mathbb{k}$, которое линейно зависит от v при фиксированном w и линейно зависит от w при фиксированном v , т. е. для любых векторов $v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W$ и любых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{k}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \rangle &= \\ &= \lambda_1 \mu_1 \langle v_1, w_1 \rangle + \lambda_1 \mu_2 \langle v_1, w_2 \rangle + \lambda_2 \mu_1 \langle v_2, w_1 \rangle + \lambda_2 \mu_2 \langle v_2, w_2 \rangle. \end{aligned}$$

Спаривание называется *невырожденным*, если оно удовлетворяет условиям следующей леммы:

Лемма 7.1

Следующие свойства свёртки (7-5) равносильны друг другу:

- 1) для каждого ненулевого $v \in V$ найдётся $w \in W$, а для каждого ненулевого $w \in W$ найдётся $v \in V$, такие что $\langle v, w \rangle \neq 0$.
- 2) отображение $V \rightarrow W^*$, сопоставляющее вектору v линейную форму $w \mapsto \langle v, w \rangle$ на W , является изоморфизмом
- 3) отображение $W \rightarrow V^*$, сопоставляющее вектору w линейную форму $v \mapsto \langle v, w \rangle$ на V , является изоморфизмом

Доказательство. В силу линейности $\langle v, w \rangle$ по v и по w , оба отображения, о которых идёт речь в (2) и (3), корректно определены и линейны. Условие (1) утверждает, что оба они инъективны. Поэтому из (1) вытекают неравенства $\dim V \leq \dim W^*$ и $\dim W \leq \dim V^*$. Так как $\dim V = \dim V^*$ и $\dim W = \dim W^*$, оба эти неравенства являются равенствами,

¹это означает, что сумма конечного числа единиц поля \mathbb{k} никогда не равна нулю или, эквивалентно, что наименьшее подполе в \mathbb{k} , содержащее 0 и 1, изоморфно полю \mathbb{Q}

а вложения (2) и (3) — изоморфизмы. Таким образом, из (1) вытекают (2) и (3). Наоборот, если выполняется одно из условий (2) или (3), то автоматически выполняется и второе¹, а значит, и условие (1). \square

Пример 7.5 (свёртка векторов с ковекторами)

Свёртка между конечномерными пространствами V^* и V , задаваемая вычислением значения линейных форм на векторах $\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$ невырождена. Обозначение стоящее в левой части подчёркивает симметрию между V и V^* , и мы будем им часто пользоваться в дальнейшем.

Пример 7.6 (определитель на \mathbb{k}^2)

На координатной плоскости $V = \mathbb{k}^2$ имеется невырожденная свёртка $V \times V \rightarrow \mathbb{k}$, задаваемая определителем из прим. 6.4 на стр. 83: $\langle a, b \rangle = \det(a, b)$. В частности, любая линейная форма $\varphi : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}$ имеет вид $\varphi(a) = \det(b_\varphi, a)$, где $b_\varphi \in \mathbb{k}^2$ — некоторый вектор, однозначно определяемый по форме φ .

7.2. Аннуляторы. Каждое множество ковекторов $M \subset V^*$ можно воспринимать как систему однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$, $\xi \in M$, на вектор $x \in V$. Множество всех решений этой системы обозначается

$$\text{Ann}(M) = \{v \in V \mid \xi(v) = 0 \quad \forall \xi \in M\} \subset V.$$

и называется *аннулятором* множества ковекторов $M \subset V^*$. Будучи пересечением ядер линейных отображений $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ по всем $\xi \in M$, аннулятор произвольного множества ковекторов $M \subset V^*$ всегда является векторным подпространством в V .

Двойственным образом, для любого множества векторов $N \subset V$ положим

$$\text{Ann}(N) = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in N\} \subset V^*.$$

Алгебраически, $\text{Ann}(N)$ это множество всех линейных уравнений $\xi(x) = 0$, решения которых содержат все векторы из N . Геометрически — это множество всех проходящих через N гиперплоскостей в V . Вместе с тем, как и выше, $\text{Ann}(N) \subset V^*$ есть множество решений системы однородных уравнений $ev_v(y) = 0$, $v \in N$, на ковектор $y \in V^*$ или, что то же самое, пересечение гиперплоскостей $\text{Ann}(v) \subset V^*$ по всем $v \in N$. В частности, $\text{Ann}(N)$ является векторным подпространством в V^* .

Упражнение 7.5. Убедитесь, что аннулятор любого множества совпадает с аннулятором его линейной оболочки.

Предложение 7.2

$\dim U + \dim \text{Ann } U = \dim V$ для любого подпространства $U \subset V$.

Доказательство. Выберем базис $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ и дополним его векторами w_1, w_2, \dots, w_m до базиса в V (таким образом, $\dim V = k + m$) и обозначим через

$$u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^*, w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^* \in V^*$$

¹это переформулировка канонического отождествления $W \simeq W^{**}$: если V изоморфно W^* , то и W изоморфно $V^* = W^{**}$

двойственный базис. Тогда $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^* \in \text{Ann } U$, поскольку для любого $v = \sum x_i u_i \in U$

$$w_v^*(v) = w_v^*(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k) = \sum x_i \cdot w_v^*(u_i) = 0.$$

Так как любой ковектор $\varphi = \sum y_i u_i^* + \sum z_j w_j^* \in \text{Ann}(U)$ имеет $y_i = \varphi(u_i) = 0$, базисные ковекторы $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*$ линейно порождают $\text{Ann}(U)$, а значит, образуют там базис. Тем самым, $\dim \text{Ann}(U) = m = \dim V - \dim U$. \square

Следствие 7.1

$\text{Ann Ann}(U) = U$ для любого подпространства $U \subset V$.

Доказательство. $U \subset \text{Ann Ann}(U)$ и по предл. 7.2 $\dim \text{Ann Ann } U = \dim U$. \square

Замечание 7.1. Для любого подпространства $U \subset V^*$ также выполняются равенства

$$\dim U + \dim \text{Ann } U = \dim V \quad \text{и} \quad \text{Ann Ann}(U) = U.$$

Они получаются, если в предл. 7.2 и сл. 7.1 взять в них V двойственное пространство V^* и воспользоваться каноническим отождествлением V^{**} с V .

Замечание 7.2. На языке линейных уравнений предл. 7.2 означает, что каждое подпространство коразмерности t в V можно задать системой из t линейно независимых линейных уравнений, и наоборот, множество решений всякой системы из t линейно независимых уравнений на пространстве V представляет собою векторное подпространство коразмерности t . А сл. 7.1 утверждает, что любая линейная форма, зануляющаяся на множестве решений произвольно заданной системы линейных однородных уравнений линейно выражается через уравнения этой системы.

Упражнение 7.6. Покажите, что $\text{Ann Ann } N = \text{span } N$ для любого подмножества $N \subset V$.

Теорема 7.1

Соответствие $U \leftrightarrow \text{Ann}(U)$ задаёт биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^* . Эта биекция оборачивает включения: $U \subset W \iff \text{Ann } U \supset \text{Ann } W$, и переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}(V)$ множество всех подпространств векторного пространства V . Равенство $\text{Ann Ann}(U) = U$ означает, что отображения, сопоставляющие подпространству его аннулятор в двойственном пространстве:

$$\mathcal{S}(V) \begin{array}{c} \xrightarrow{U \mapsto \text{Ann } U} \\ \xleftarrow{\text{Ann } W \leftarrow W} \end{array} \mathcal{S}(V^*)$$

обратны друг другу, и следовательно, биективны. Импликация $U \subset W \Rightarrow \text{Ann } U \supset \text{Ann } W$ очевидна. Если взять в ней в качестве U и W , соответственно, подпространства $\text{Ann } W$ и $\text{Ann } U$ и воспользоваться равенствами $\text{Ann Ann } W = W$ и $\text{Ann Ann } U = U$, получим обратную импликацию $\text{Ann } U \supset \text{Ann } W \Rightarrow U \subset W$. Равенство

$$\bigcap_v \text{Ann}(U_v) = \text{Ann} \left(\sum_v U_v \right) \quad (7-6)$$

очевидно: любая линейная форма, зануляющаяся на каждом из подпространств U_ν , зануляется и на их линейной оболочке, а форма, зануляющаяся на сумме подпространств, зануляется и на каждом из них в отдельности. Если взять в (7-6) в качестве подпространств U_ν пространства $\text{Ann } U_\nu$, получаем равенство $\bigcap_\nu U_\nu = \text{Ann} \left(\sum_\nu \text{Ann } U_\nu \right)$. Беря в нём аннуляторы обеих частей, получаем равенство $\text{Ann} \left(\bigcap_\nu W_\nu \right) = \sum_\nu \text{Ann}(W_\nu)$. \square

Следствие 7.2

Для любого подпространства $U \subset V$ имеются канонические изоморфизмы

$$(V/U)^* \simeq \text{Ann}(U) \quad \text{и} \quad U^* \simeq V^*/\text{Ann}(U).$$

Доказательство. Если форма $\varphi \in \text{Ann } U$, то для любых $u \in U$ и $v \in V$ выполняются равенства $\varphi(v+u) = \varphi(v) + \varphi(u) = \varphi(v)$. Поэтому правило $\tilde{\varphi}([v]) = \varphi(v)$ корректно задаёт линейную форму $\tilde{\varphi}$ на факторе V/U . Отображение

$$\text{Ann}(U) \rightarrow (V/U)^*, \quad \varphi \mapsto \tilde{\varphi},$$

линейно и имеет нулевое ядро. Так как размерности пространств одинаковы, это изоморфизм. Для доказательства второго изоморфизма рассмотрим оператор $V^* \rightarrow U^*$, переводящий линейную форму на V в её ограничение на $U \subset V$. Поскольку ядро этого оператора это $\text{Ann } U$, его образ изоморфен $V^*/\text{Ann}(U) \subset U^*$. Так как размерности обоих пространств одинаковы, вложение является равенством. \square

7.3. Двойственные операторы. С каждым линейным отображением $F : U \rightarrow W$ связано двойственное (или сопряжённое) линейное отображение $F^* : W^* \rightarrow U^*$, действующее между двойственными пространствами в противоположном к F направлении и переводящее ковектор $\xi : W \rightarrow \mathbb{k}$ в его композицию с F :

$$F^*(\xi) = \xi \circ F : u \mapsto \xi(F(u)).$$

Упражнение 7.7. Проверьте, что $\varphi \circ F$ является линейным отображением из U в \mathbb{k} и линейно зависит как от ξ так и от F .

Из упражнения вытекает, что сопряжение операторов $F \mapsto F^*$ является линейным отображением

$$\text{Hom}(U, V) \rightarrow \text{Hom}(W^*, U^*). \quad (7-7)$$

В более симметричных обозначениях из прим. 7.5 выше действие F на векторы $u \in U$ и действие F^* на ковекторы $\xi \in W^*$ выражаются друг через друга по формуле

$$\langle F^*\xi, v \rangle = \langle \xi, Fv \rangle \quad \forall \xi \in W^*, v \in V, \quad (7-8)$$

которая показывает, что при отождествлении V^{**} с V оператор $F^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$ отождествляется с F . Таким образом, операции сопряжения сопряжения $F \mapsto F^*$ и $F^* \mapsto F^{**} = F$ обратны друг другу, и оператор сопряжения (7-7) является изоморфизмом.

Упражнение 7.8. Докажите, что $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$.

Предложение 7.3

Имеют место равенства $\ker F^* = \text{Ann im } F$ и $\text{im } F^* = \text{Ann ker } F$.

Доказательство. Первое равенство очевидно из формулы (7-8):

$$\xi \in \text{Ann im } F \iff \langle \xi, Fv \rangle = 0 \quad \forall v \in V \iff \langle F^*\xi, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \iff F^*\xi = 0.$$

Второе получается взятием аннуляторов от обеих частей первого равенства, написанного для оператора F^* . \square

Следствие 7.3

Инъективность F равносильна сюръективности F^* . Двойственным образом, сюръективность F равносильна инъективности F^* .

7.3.1. Матрица двойственного оператора. Выберем в U и U^* двойственные базисы $\{u_j\}$ и $\{u_j^*\}$, а в W и W^* — двойственные базисы $\{w_i\}$ и $\{w_i^*\}$, и сопоставим оператору $F : U \rightarrow W$ его матрицу $F_{wu} = (f_{ij})$ в базисах u и w . Напомним¹, что в j -том столбце матрицы F_{wu} стоят координаты f_{ij} (где $1 \leq i \leq m$) образа j -того базисного вектора u_j в базисе w , т. е. коэффициенты разложения $F(u_j) = f_{1j}w_1 + f_{2j}w_2 + \dots + f_{mj}w_m$, или свёртки

$$f_{ij} = \langle w_i^*, Fu_j \rangle = \langle F^*w_i^*, u_j \rangle.$$

Эта же свёртка является одновременно j -той координатой ковектора $F^*(w_i)$ в базисе u^* , т. е. (j, i) -тым элементом f_{ji}^* матрицы $F_{u^*w^*}^* = (f_{ij}^*)$ двойственного оператора F^* в двойственных базисах. Иначе говоря, i -тая строка матрицы F_{wu} является i -тым столбцом матрицы $F_{u^*w^*}^*$, а j -тый столбец матрицы F_{wu} является i -той строкой матрицы $F_{u^*w^*}^*$.

Матрица A^t по строкам которой записаны сверху вниз прочитанные слева направо столбцы² матрицы A называется *транспонированной* к матрице A . На языке формул, матрица $A^t = (a_{ij}^t)$, транспонированная к матрице $A = (a_{ij})$, имеет $a_{ij}^t = a_{ji}$.

Итак, матрицы двойственных операторов в двойственных базисах получаются друг из друга транспонированием: $F_{u^*w^*}^* = F_{wu}^t$.

Следствие 7.4 (теорема о ранге матрицы)

У любой матрицы $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$ размерность линейной оболочки её строк в \mathbb{k}^n и размерность линейной оболочки её столбцов в \mathbb{k}^m равны друг другу. Это число называется *рангом* матрицы A и обозначается $\text{rk } A$.

Доказательство. Обозначим через $F : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$ линейный оператор, матрица которого в стандартных базисах этих двух координатных пространств равна A . Тогда размерность линейной оболочки столбцов матрицы A равна $\dim \text{im } F$, а размерность линейной оболочки строк матрицы A равна $\dim \text{im } F^*$, где $F^* : \mathbb{k}^{m*} \rightarrow \mathbb{k}^{n*}$ — двойственный к F оператор. По [предл. 7.3](#) и [предл. 6.1](#) $\dim \text{im } F^* = \dim \text{Ann ker } F = n - \dim \text{ker } F = \dim \text{im } F$. \square

¹см. 6-19 на стр. 91

²по-другому можно сказать, что матрица A^t получается из матрицы A отражением относительно биссектрисы левого верхнего угла — прямой $i = j$

Следствие 7.5 (теорема Кронекера – Капелли)

Система (неоднородных) линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство. Наличие у системы решения означает, что столбец правых частей b лежит в линейной оболочке столбцов матрицы $A = (a_{ij})$. Это равносильно тому, что при добавлении к матрице A столбца b размерность линейной оболочки столбцов не меняется. \square

Следствие 7.6

Размерность пространства решений системы однородных линейных уравнений на n переменных с матрицей коэффициентов A равна $n - \operatorname{rk} A$.

Доказательство. $\dim \ker = n - \dim \operatorname{im} A = n - \operatorname{rk} A$. \square

7.4. Метод Гаусса. Пусть подпространство $U \subset \mathbb{k}^n$ задано как линейная оболочка k векторов

$$\begin{aligned} w_1 &= (w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n}) \\ w_2 &= (w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n}) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ w_k &= (w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kn}), \end{aligned} \tag{7-9}$$

Мы собираемся построить в U такой базис u_1, u_2, \dots, u_r , что матрица вида (7-9), по строкам которой записаны координаты векторов u_i , будет иметь в некоторых r столбцах с номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ единичную подматрицу размера $r \times r$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

т. е. базис u_1, u_2, \dots, u_r будет удовлетворять условию (4) из предл. 6.7 на стр. 99. Идея построения состоит в том, чтобы обнулять координаты в столбцах матрицы (7-9), последовательно заменяя подходящие пары векторов w_i, w_j их линейными комбинациями

$w'_i = aw_i + bw_j$ и $w'_j = cw_i + dw_j$ так, чтобы линейная оболочка этой пары не менялась. Таковы, например, замены следующих трёх типов:

$$\begin{aligned} 1) \quad w'_i &= w_i + \lambda w_j & w'_j &= w_j & (\text{с любым } \lambda \in \mathbb{k} \text{ любое}) \\ 2) \quad w'_i &= w_j & w'_j &= w_i & \\ 3) \quad w'_i &= \varrho w_i & w'_j &= w_j & (\text{с ненулевым } \varrho \in \mathbb{k}) \end{aligned} \tag{7-10}$$

Исходные векторы линейно выражаются в них через преобразованные как

$$\begin{aligned} w_i &= w'_i - \lambda w'_j & w_j &= w'_j \\ w_i &= w'_j & w_j &= w'_i \\ w_i &= \varrho^{-1} w'_i & w_j &= w'_j. \end{aligned}$$

При заменах (7-10) матрица (w_{ij}) , по строкам которой стоят координаты векторов (7-9), испытывает следующие *элементарные преобразования строк*:

1. к одной из строк прибавляется другая, умноженная на любое число¹
2. какие-нибудь две строки матрицы меняются местами
3. одна из строк умножается на ненулевое число.

Лемма 7.2 (о приведении к строгому ступенчатому виду)

Всякая матрица $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$ элементарными преобразованиями строк приводится к виду, в котором самый левый ненулевой элемент каждой строки равен 1, располагается строго правее, чем в предыдущей строке, и является единственным ненулевым элементом своего столбца.

Доказательство. Удобно разбить процесс на n последовательных шагов (по количеству столбцов). Будем предполагать, что после выполнения $(k - 1)$ -го шага та часть матрицы, что находится слева от k -ого столбца, имеет нужный вид (при $k = 1$ это ничего не означает). Пусть в этой части имеется s ненулевых строк. По нашему предположению $0 \leq s \leq k - 1$ и эти строки являются верхними. Очередной k -тый шаг вычисления состоит из следующих действий.

Выберем в k -том столбце в строках строго ниже s -той какой-нибудь ненулевой элемент a (если его нет, можно перейти к $(k + 1)$ -му шагу). Умножим строку, где он стоит, на a^{-1} . Потом поменяем эту строку местами с $(s + 1)$ -ой строкой. Это не изменит левые $(k - 1)$ столбцов матрицы, а $(s + 1)$ -ую строку приведёт к виду

$$\underbrace{00 \dots 00}_{k-1} \quad 1 \quad \underbrace{* * \dots * *}_{n-k} .$$

Теперь для каждого $i \neq s + 1$ вычтем из i -той строки $(s + 1)$ -ую строку, умноженную на элемент, стоящий в пересечении i -той строки и k -того столбца. Это не изменит левые $(k - 1)$ столбцов матрицы и занулит все элементы k -того столбца за исключением стоящей $(s + 1)$ -ой строке единицы. В результате мы попадаем в исходное положение для $(k + 1)$ -го шага. \square

¹подчеркнём, что все остальные строки (в том числе та, что прибавлялась) остаются без изменения

7.4.1. Отыскание базисов в линейной оболочке и факторе. Поскольку линейная оболочка строк матрицы не меняется при элементарных преобразованиях, ненулевые строки u_1, u_2, \dots, u_r итоговой строгой ступенчатой матрицы порождают то же самое подпространство U , что и строки w_1, w_2, \dots, w_k исходной матрицы (7-9), но при этом удовлетворяют условию (4) из предл. 6.7, в котором в качестве $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ следует взять номера тех столбцов, где стоят самые левые единицы строк строгой ступенчатой матрицы. По предл. 6.7 строки ступенчатой матрицы составляют базис в U , а классы базисных векторов $e_j \in \mathbb{K}^n$ с $j \notin I$, образуют базис в \mathbb{K}^n / U .

Пример 7.7

Найдём базис в линейной оболочке U четырёх векторов координатного пространства \mathbb{Q}^5 , строки которых образуют матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7-11)$$

умножим последнюю строку на -1 и поменяем местами с первой

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

зачемяем первый столбец под первой строкой, добавляя ко всем строкам подходящие кратности первой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

теперь зачемяем второй столбец под второй строкой, добавляя подходящие её кратности к последним двум строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

делим третью строку на -2 и зачемяем последний столбец вне третьей строки, добавляя к первой и четвёртой строкам подходящие кратности третьей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7-12)$$

Получилась строгая ступенчатая матрица. Её строки составляют базис в линейной оболочке строк исходной матрицы (7-11). Таким образом, $\dim U = 3$ и U изоморфно проектируется на трёхмерное координатное подпространство

$$E_{(1,2,5)} = \text{span}(e_1, e_2, e_5)$$

вдоль дополнительного к нему двумерного координатного подпространства

$$E_{(3,4)} = \text{span}(e_3, e_4)$$

так что строки матрицы (7-12) переходят при такой проекции в точности в стандартные базисные векторы e_1, e_2, e_3 . Тем самым, подпространство U имеет нулевое пересечение с ядром этой проекции, т. е. $U \cap E_{(3,4)} = 0$. Поэтому координатное подпространство $E_{(3,4)}$ изоморфно проектируется на фактор \mathbb{Q}^5/U , и классы $e_3 \pmod{U}$ и $e_4 \pmod{U}$ образуют в нём базис.

Упражнение 7.9. Покажите, что r -мерное пространство U , заданное координатами каких-нибудь $m \geq r$ порождающих векторов (7-9), изоморфно проектируется на координатное подпространство E_r тогда и только тогда, когда в матрице (7-9), по строкам которой написаны координаты этих векторов, в столбцах с номерами i_1, i_2, \dots, i_r находится $m \times r$ подматрица ранга r .

Пример 7.8

На двойственном языке вычисление (7-11)–(7-12) выглядит как решение системы линейных уравнений. А именно, аннулятор $\text{Ann } U \subset \mathbb{Q}^{5*}$ подпространства $U \subset \mathbb{Q}^5$, порождённого строками матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7-13)$$

есть пространство решений системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad (7-14)$$

матрица коэффициентов которой есть матрица (7-13). Приведя её к строгому ступенчатому виду (7-12)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

мы выбрали в пространстве уравнений U базис, состоящий из уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

которые эквивалентны исходным уравнениям (7-14), но допускают явное выражение переменных x_1, x_2, x_5 через переменные x_3 и x_4

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad (7-15)$$

Переменные x_3 и x_4 называются в этой ситуации *свободными* (им можно придавать любые значения), а переменные x_1, x_2 и x_5 — *связанными* (они однозначно определяются из (7-15) как только заданы какие-нибудь значения свободных переменных). На геометрическом языке это означает, что двумерное пространство $\text{Ann}(U) \simeq (\mathbb{Q}^5/U)^*$ изоморфно проектируется в \mathbb{Q}^{5*} на координатное подпространство $E_{3,4}^* = \text{span}(e_3^*, e_4^*)$ вдоль дополнительного координатного подпространства $E_{1,2,5}^* = \text{span}(e_1^*, e_2^*, e_5^*)$. В частности, в пространстве $\text{Ann}(U) \simeq (\mathbb{Q}^5/U)^*$ решений системы (7-14) есть базис из ковекторов вида¹ $u_1^\perp = (*, *, 1, 0, *)$, $u_2^\perp = (*, *, 0, 1, *)$. Отмеченные звёздочками координаты легко находятся из (7-15) и равны $(2, -1, 1, 0, 0)$ и $(1, 1, 0, 1, 0)$.

7.4.2. Решение системы линейных уравнений. Пространство решений произвольной системы линейных однородных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \quad (7-16)$$

описывается аналогично. Обозначим через $U \subset \mathbb{k}^n$ линейную оболочку строк матрицы $A = (a_{ij})$. Тогда пространство решений системы (7-16) представляет собой аннулятор $\text{Ann}(U) \simeq (\mathbb{k}^n/U)^*$. Если выбрать в пространстве уравнений U базис вида

$$\begin{aligned} u_1 &= e_{i_1} + \alpha_{1j_1}e_{j_1} + \alpha_{1j_2}e_{j_2} + \dots + \alpha_{1j_{n-r}}e_{j_{n-r}} \\ u_2 &= e_{i_2} + \alpha_{2j_1}e_{j_1} + \alpha_{2j_2}e_{j_2} + \dots + \alpha_{2j_{n-r}}e_{j_{n-r}} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_r &= e_{i_r} + \alpha_{rj_1}e_{j_1} + \alpha_{rj_2}e_{j_2} + \dots + \alpha_{rj_{n-r}}e_{j_{n-r}} \end{aligned} \quad (7-17)$$

удовлетворяющий условию (4) из [предл. 6.7](#), то матрица (α_{ij}) соответствующей ему системы уравнений содержит единичную подматрицу размера $r \times r$ в столбцах с номерами i_1, i_2, \dots, i_r .

Упражнение 7.10. Пусть $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ обозначают стандартный базис² в \mathbb{k}^{n*} . Положим

$$E_j^* = \text{span}(e_{j_1}^*, e_{j_2}^*, \dots, e_{j_{n-r}}^*) \quad \text{и} \quad E_i^* = \text{span}(e_{i_1}^*, e_{i_2}^*, \dots, e_{i_r}^*).$$

Покажите, что если подпространство $U \subset \mathbb{k}^n$ удовлетворяет условиям из [предл. 6.7](#) на стр. [99](#), то его аннулятор $\text{Ann } U \subset \mathbb{k}^{n*}$ обладает следующими эквивалентными друг другу свойствами: а) $\text{Ann } U \cap E_i^* = 0$ б) E_i^* изоморфно отображается на $\mathbb{k}^{n*}/\text{Ann } U$ в) проекция $c_j : \mathbb{k}^{n*} \rightarrow E_j^*$ вдоль E_i^* изоморфно отображает U на E_j^* г) в $\text{Ann } U$ есть $(n-r)$ ковекторов вида $u_\mu^\perp = e_{j_\mu}^* + \tau_\mu$, где $\tau_\mu \in E_j^*$. При этом векторы, о которых идёт

¹эти ковекторы являются прообразами стандартных базисных ковекторов e_3^*, e_4^* относительно проекции $\text{Ann}(U) \rightarrow E_{(3,4)}^*$ вдоль $E_{(1,2,5)}$ и образуют базис в $(\mathbb{Q}^5/U)^* \simeq \text{Ann}(U)$, двойственный к обсуждавшемуся выше базису $e_3 \pmod{U}, e_4 \pmod{U}$ в факторе \mathbb{Q}^5/U

²двойственный к стандартному базису e_1, e_2, \dots, e_n пространства \mathbb{k}^n

речь в (7), единственны, образуют базис в $\text{Ann } U$ и связаны с векторами $u_\nu = e_{i_\nu} + w_\nu \in U$ из условия (4) в [предл. 6.7](#) на стр. 99 формулой

$$\tau_\mu = - \left\langle e_{j_\mu}^*, w_1 \right\rangle \cdot e_{i_1}^* - \left\langle e_{j_\mu}^*, w_2 \right\rangle \cdot e_{i_2}^* - \dots - \left\langle e_{j_\mu}^*, w_r \right\rangle \cdot e_{i_r}^*. \quad (7-18)$$

Согласно [упр. 7.10](#) ковекторы

$$\begin{aligned} u_1^\perp &= e_{j_1}^* - \alpha_{1j_1} e_{i_1}^* - \alpha_{2j_1} e_{i_2}^* - \dots - \alpha_{rj_1} e_{i_r}^* \\ u_2^\perp &= e_{j_1}^* - \alpha_{1j_2} e_{i_1}^* - \alpha_{2j_2} e_{i_2}^* + \dots - \alpha_{rj_2} e_{i_r}^* \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_{n-r}^\perp &= e_{j_{n-r}}^* - \alpha_{1j_{n-r}} e_{i_1}^* - \alpha_{2j_{n-r}} e_{i_2}^* - \dots - \alpha_{rj_{n-r}} e_{i_r}^* \end{aligned} \quad (7-19)$$

составляют базис пространства $\text{Ann}(U) \subset \mathbb{k}^{n*}$ решений системы (7-16).

Упражнение 7.11. Проверьте это независимо от [упр. 7.10](#).

Иначе можно сказать, что базисные решения u_j^\perp получаются приданием одной из свободных переменных $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-r}}$ значения 1, остальным свободным переменным — значения нуль, а каждой связанной переменной x_{i_ν} — того значения, которое получается из единственного содержащего x_{i_ν} уравнения.

7.4.3. Расположение подпространства относительно базиса. Покажем, что с точностью до добавления нулевых строк результат приведения к строгому ступенчатому виду матрицы координат любого набора векторов, порождающих данное подпространство $U \subset \mathbb{k}^n$, не зависит ни от выбора этих векторов, ни от способа приведения.

Для этого рассмотрим убывающую цепочку координатных подпространств

$$V = V^0 \supset V^1 \supset V^2 \supset \dots \supset V^{n-1} \supset V^n = 0, \quad (7-20)$$

в которой $V^i = \text{span}(e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_n)$, и обозначим через $\pi_i : V \rightarrow V/V^i$ отображение факторизации¹. Цепочка (7-20) называется *полным флагом*. Сопоставим каждому r -мерному подпространству $U \subset V$ набор неотрицательных целых чисел $d_i = \dim \pi_i(U) = r - \dim U \cap V^i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Числа d_0, d_1, \dots, d_n образуют неубывающую последовательность, которая начинается с $d_0 = 0$, заканчивается на $d_n = r$ и прирастает не более, чем на единицу за один шаг: $d_i - d_{i-1} \leq 1$.

Упражнение 7.12. Докажите это.

Например, для подпространства $U \subset \mathbb{Q}^5$, порождённого строками матрицы (7-12), получаем последовательность $(d_0, d_1, \dots, d_5) = (0, 1, 2, 2, 2, 3)$.

Набор $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ тех номеров, в которых происходят ненулевые приращения $d_{i_\nu} - d_{i_\nu-1} = 1$, зависит только от подпространства U и флага (7-20). Мы будем называть его *комбинаторным типом* U относительно полного координатного флага (7-20). Так, подпространство $U \subset \mathbb{Q}^5$, порождённое строками матрицы (7-12) имеет комбинаторный тип $I = (1, 2, 5)$.

Упражнение 7.13. Убедитесь, что комбинаторный тип подпространства, порождённого строками строгой ступенчатой матрицы, всегда представляет собою набор номеров тех столбцов, где стоят самые левые единицы строк.

¹ограничение π_i на координатное подпространство $E_i = \text{span}(e_1, e_2, \dots, e_i)$ задаёт изоморфизм $E_i \cong V/V^i$, при помощи которого можно отождествить π_i с проекцией \mathbb{k}^n на E_i вдоль V^i , т. е. с забыванием последних $(n - i)$ координат в \mathbb{k}^n

Таким образом, форма ступенчатой матрицы, однозначно определяется флагом (7-20) и подпространством U . Поскольку базис $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r} \in U$, проектирующийся в стандартные базисные векторы $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}$ вдоль дополнительного координатного подпространства E_J тоже единственен по предл. 6.7 на стр. 99, ненулевые строки строгой ступенчатой матрицы, которая получится при применении метода Гаусса к матрице координат любой системы порождающих векторов пространства U , зависит только от самого подпространства U и зафиксированного нами с самого начала стандартного базиса в \mathbb{k}^n , в котором записываются координаты всех векторов. Мы доказали

Следствие 7.7

В каждом подпространстве $U \subset \mathbb{k}^n$ существует единственный базис со строгой ступенчатой матрицей координат M_U , и сопоставление подпространству U матрицы M_U устанавливает биекцию между строгими ступенчатыми матрицами с r ненулевыми строками и r -мерными подпространствами в \mathbb{k}^n . \square

Упражнение 7.14. Покажите, что строгие ступенчатые матрицы комбинаторного типа (i_1, i_2, \dots, i_r) образуют в $\text{Mat}_{r \times n}(\mathbb{k})$ аффинное подпространство размерности $r(n - r) -$

$$\sum_{v=1}^r (i_v - v + 1).$$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 7.4. Набор $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ линейно независим, поскольку применяя ξ_i к обеим частям соотношения $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ получаем $\lambda_i = 0$ (и так для каждого i). Поскольку $\dim V = n$, этот набор является базисом, тогда из условия вытекает, что ξ_i составляют двойственный базис, т. е. являются координатами вдоль v_i .

Упр. 7.5. Если линейная форма зануляется на неких векторах, то она зануляется и на любой их линейной комбинации.

Упр. 7.8. Типичный для алгебры перенос из левой части в правую:

$$\langle G^* F^* \xi, v \rangle = \langle F^* \xi, Gv \rangle = \langle \xi, FGV \rangle$$

Упр. 7.9. При проекции $c_I : \mathbb{k}^n \rightarrow E_I$ векторы w_i перейдут в строки этой подматрицы, и для того, чтобы $c_I|_U$ была изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы размерность их линейной оболочки была r .

Упр. 7.10. Эквивалентность свойств (а)–(г) и единственность базиса (г) следуют из [предл. 6.7](#) на стр. 99, применённой к подпространству $\text{Ann } U \subset \mathbb{k}^{n*}$. Покажем, что $u_\mu^\perp = e_{j_\mu}^* + \tau_\mu$ с

$$\tau_\mu = - \sum_{\nu=1}^r \langle e_{j_\mu}^*, w_\nu \rangle \cdot e_{i_\nu}^*$$

составляют базис в $\text{Ann } U$. Они лежат в $\text{Ann } U$, поскольку

$$\begin{aligned} \langle u_\mu^\perp, u_\nu \rangle &= \langle e_{j_\mu}^* + \tau_\mu, e_{i_\nu} + w_\nu \rangle = \langle e_{j_\mu}^*, w_\nu \rangle + \langle \tau_\mu, e_{i_\nu} \rangle = \\ &= \langle e_{j_\mu}^*, w_\nu \rangle - \sum_{\alpha=1}^r \langle e_{j_\mu}^*, w_\alpha \rangle \cdot \langle e_\alpha^*, e_{i_\nu} \rangle = \langle e_{j_\mu}^*, w_\nu \rangle - \langle e_{j_\mu}^*, w_\nu \rangle = 0 \end{aligned}$$

и линейно независимы, так как $e_{j_\mu}^*$ линейно независимы.

Упр. 7.11. Векторы u_ν^\perp линейно независимы, поскольку базисный ковектор $e_{j_\nu}^*$ входит только в u_ν и не может быть сокращён никакой линейной комбинацией остальных u_μ . Они все лежат в $\text{Ann } U$, так как

$$\langle u_\nu^\perp, u_\mu \rangle = \langle e_{j_\nu}^* - \sum_k \alpha_{kj_\nu} e_{i_k}^*, e_{i_\mu} + \sum_\ell \alpha_{\mu j_\ell} e_{j_\ell} \rangle = \alpha_{\mu j_\nu} \langle e_{j_\nu}^*, e_{j_\nu} \rangle - \alpha_{\mu j_\nu} \langle e_{i_\mu}^*, e_{i_\mu} \rangle = 0$$

Упр. 7.12. Поскольку пространство V^i порождается пространством V^{i+1} и вектором e_i , пространство $U \cap V^i$ содержится в линейной оболочке $U \cap V^{i+1}$ и вектора e_i , размерность которой, отличается от $\dim(U \cap V_{i+1})$ не больше, чем на единицу.

Упр. 7.13. Для такого подпространства $d_i = \dim \pi_i(U)$ равна числу ненулевых строк в подматрице, сосредоточенной в первых i столбцах.

Упр. 7.14. Если отнять из произвольной матрицы комбинаторного типа I матрицу E_I , в столбцах I которой стоит единичная $r \times r$ подматрица, а в остальных местах нули, получится матрица имеющая нули в столбцах I , а также при всех $\nu = 1, \dots, r$ нули в строке ν в позициях с 1 -й по i_ν -тую включительно. Такие матрицы составляют в $\text{Mat}_{r \times n}(\mathbb{k})$ векторное подпространство указанной коразмерности $r^2 + \sum_{\nu=1}^r (i_\nu - \nu + 1)$.