

## Домашнее задание 5

Все представления в этом листке — над полем комплексных чисел.

**5.0 (для  $\leq 2$ -курсников).** Пусть  $V$  — некоторое представление группы  $S_3$ ,  $\sigma = (12)$ ,  $\tau = (123)$ .

- а) Докажите, что если  $v \in V$  — собственный вектор для  $\tau$ , отвечающий собственному значению  $\omega$ , то вектор  $\sigma v$  также является собственным вектором для  $\tau$  с собственным значением  $\omega^2 = \omega^{-1}$ .
- б) Докажите, что в условиях предыдущего пункта подпространство  $\langle v, \sigma(v) \rangle$  является подпредставлением группы  $S_3$ .

(Следствие: размерность неприводимого представления группы  $S_3$  не превышает двух.)

- в) Опишите все неприводимые представления группы  $S_3$  с точностью до изоморфизма.

(Вырожденная аффинная) алгебра Гекке  $H(2)$  — это алгебра с образующими  $Y_1, Y_2$  и  $s$  и соотношениями  $Y_1 Y_2 = Y_2 Y_1$ ,  $s^2 = 1$ ,  $s Y_1 - Y_2 s = 1$ .

**5.1. а)** Представьте  $\mathbb{C}[S_3]$  как фактор алгебры  $H(2)$ .

- б) Докажите, что размерность неприводимого представления алгебры  $H(2)$  не превышает двух.
- в) Опишите явно (задайте матрицами каждое по одному разу) все неприводимые представления  $H(2)$ .

**5.2.** Опишите все такие диаграммы Юнга, что размерность соответствующего представления группы  $S_n$  (т. е. число стандартных таблиц данной формы) меньше  $n$ .

Решения этого задания нужно сдать в письменном виде до 17:00 (т.е. до начала лекции) 23 октября 2013 г.