

## 2. Проективная геометрия коник

**Задача Дня.** *Построение Кипера.* На сторонах неравнобедренного треугольника  $ABC$ , как на основаниях, во внешнюю сторону построены подобные равнобедренные треугольники  $ABC'$ ,  $BCA'$ ,  $CAB'$ . Докажите, что прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке  $K$ , и найдите геометрическое место точек  $K$  для данного треугольника  $ABC$ .

**2.1.** Точки  $A, O, C, B, D$  лежат на прямой в указанном порядке. Известно, что  $AO = OB$  и  $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ . Найдите двойное отношение  $(A, B, C, D)$ .

Двойное отношение точек  $A, B, C, D$  окружности — это величина  $(A, B, C, D) := (XA, XB, XC, XD)$ , где  $X$  — некоторая точка окружности, отличная от  $A, B, C$  и  $D$ .

- 2.2.** а) Двойное отношение  $(A, B, C, D)$  не зависит от выбора точки  $X$  на окружности.  
 б) Проекция окружности из любой ее точки на прямую сохраняет двойные отношения.  
 в)  $(A, B, C, D) = (AD, BD, CD, d)$ , где  $d$  — касательная к окружности в точке  $D$ .  
 г) Выразите  $(A, B, C, D)$  через длины отрезков  $AC, BD, AD$ , и  $BC$ .  
 д) Касательные к окружности в точках  $A$  и  $B$  пересекаются на  $CD$ . Найдите  $(A, B, C, D)$ .  
 е) С помощью одной линейки проведите касательную к окружности из точки вне нее.  
 ж) Если  $X$  не лежит на окружности, то  $(A, B, C, D) \neq (XA, XB, XC, XD)$ .  
 з) Через любые 5 точек плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, можно провести конику.

**2.3.** Центральным проектированием можно перевести данную окружность в окружность, а данную точку внутри нее — в центр образа.

- 2.4.** а) *Теорема Ньютона.* Прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырехугольника, проходят через точку пересечения диагоналей.  
 б) *Теорема Бриансона.* Если шестиугольник  $ABCDEF$  описанный, то  $AD, BE$  и  $CF$  пересекаются в одной точке.  
 в) *Теорема Паскаля.* Если шестиугольник  $ABCDEF$  вписанный, то три точки  $AE \cap FB, BD \cap CE$  и  $AD \cap CF$  лежат на одной прямой.

**2.5.** Даны две различные точки  $A$  и  $A'$  на плоскости. Каждой прямой  $l$ , проходящей через  $A$ , поставили в соответствие некоторую прямую  $l'$ , проходящую через  $A'$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- точки вида  $l \cap l'$  лежат на одной конике, проходящей через  $A$  и  $A'$ , или прямой;
- при нашем соответствии сохраняется двойное отношение.

### Сданные решения

Абрамов 1.1ab	Акимова 1.1ab	Гацולהва 1.2a	Гринько 1.1ab
Дмитриенко 1.1ab, 1.3a+, 1.4a	Думанский ЗД	Елишев 1.1ab	Елшин 1.1ab, 1.3c
Жукова 1.1a $\frac{1}{2}b \pm$	Измайлов 1abc $\pm$ , 2a, 3, 4abc $\pm$	Ильин 1.1ab	Карпушкин 1.1ab, 1.1c+
Королев 1.1ab	Кравцов 1.2a	Круль 1.1ab, 1.3ab	Лагуновская 1b
Лященко 1.1ab	Малахов 1.1ab, 1.3c	Маслов 1.1ab, 1.2b	Магушкин 1.1, 1.2a, 1.4
Мецихин 1.2a, 1.3c	Михайлов 1.1ab, 1.2a $\pm b \mp$	Никитин 1.1ab	Новак 1.1a $\Rightarrow b$
Райко 1.1ab	Сеилов 1.1c	Халайджи Саша 1.1a, 1.2b	Халайджи Леша 1.2b
Хачатурян 1.1ab	Худяков 1.1ab	Шарипова 1.1ab, 1.2ab	