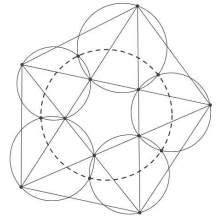


3. Геометрия Мёбиуса

Задача Дня. *Теорема Клиффорда о (5) окружностях.* Стороны выпуклого пятиугольника продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда. Около треугольников – лучей звезды описали окружности. Тогда пять последовательных точек пересечения этих окружностей, отличных от вершин пятиугольника, лежат на одной окружности (или прямой).



3.1. а) Найдите пересечение всех окружностей и прямых, проходящих через данную точку и перпендикулярных данной окружности.

б) Через любую точку, не лежащую на двух данных окружностях, можно провести окружность или прямую, перпендикулярную им обоим.

3.2. а) Инверсией можно перевести пару пересекающихся окружностей в пару прямых.

б) Инверсией можно перевести любую пару непересекающихся окружностей в пару окружностей с общим центром.

3.3. а) *Поризм Штейнера.* Если существует цепочка различных окружностей S_1, S_2, \dots, S_n , каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2 , то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1 , касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой, внешним и внутренним в противоположном случае), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей T_1, T_2, \dots, T_n .

б) *Теорема Микеля о 6 окружностях.* Даны окружности S_1, S_2, S_3, S_4 . Пусть S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2 , S_2 и S_3 – в точках B_1 и B_2 , S_3 и S_4 – в точках C_1 и C_2 , S_4 и S_1 – в точках D_1 и D_2 . Тогда если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности (или прямой), то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности (или прямой).

с) *Точка Микеля.* Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Тогда четыре окружности, описанные около этих треугольников, имеют одну общую точку.

3.4. *Теорема Мёбиуса.* Любая биекция сферы, переводящая окружности в окружности, является композицией инверсий.

3.5. Является ли образ эллипса при инверсии (с центром, не лежащим на самом эллипсе) множеством нулей некоторого многочлена от двух переменных?

Сданные решения

Абрамов 1.1ab, 2.12abd	Акимова 1.12ab4a, 2.1	Буря: 1.1ab2a3b4a, 2.2acd	Гацולהва 1.2a
Герасимова 1.1ab2	Гринько 1.1ab23c4ab	Дмитриенко 1.13a+4a, 2.12ab	Думанский ЗД I
Елишев 1.1ab2a3c4c, 2.1	Елшин 1.1ab3c	Ерошенко 1.1–1.4	Жукова 1.1a $\frac{1}{2}$ b \pm
Замятин 1.1ab23a4bc	Измаилов 1abc \pm 2a34abc \pm	Ильин 1.12b3ab, 2.12ab	Карпушкин 1.1abc+3c
Кельвич 1.1	Киселёв 1.1ab234a5ab	Коваленко 1.2b	Королев 1.1ab
Краснов 1.1ab2a4c	Кравцов 1.2a	Круль 1.12ab34a, 2.12a–e	Лагуновская 1b
Литвинов 1.1a \Rightarrow b2a	Лященко 1.1ab, 2.12a–c	Малахов 1.1ab3c, 2.12abd	Маслов 1.1ab2, 2.1
Матушкин 1.12a4, 2.2a–e34	Мещихин 1.2a3c	Михайлов 1.1ab2a \pm b \mp 3b4b \mp , 2.12ab	Неугодов 1.1ab3c4a
Никитин 1.1ab	Новак 1.1a \Rightarrow b	Райко 1.1ab2ab34a, 2.12a–d34a	Сангаджиев (?) 1.1ab
Сеилов 1.1c	Федоров 1.4c	Халайджи Саша 1.1a2b	Халайджи Леша 1.2b
Хачатурян 1.1ab	Худяков 1.1ab	Шайдуров 1.12a3ac \pm	
Шарипова 1.124ab, 2.12a–e34a	Шевцов 1.2a \pm b3a \pm c \pm	Шуклин 1.1ab2a	