

Предел последовательности, число e

1. Найдите такое $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, что $2^n > n^{100}$.

2. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$.

3. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

4. Найдите пределы последовательностей: (а) $a_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}}_n$; (б) $a_n = \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots + \sqrt{1}}}}}_n$.

5. Существует ли предел последовательности $a_n = \sin n$?

6. а) Докажите, что, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = a$.

(б) Покажите, что обратное неверно.

Частичным пределом последовательности называется предел любой ее подпоследовательности.

Верхним и нижним пределами последовательности называются следующие величины

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k, \quad \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

7. Докажите, что верхний и нижний пределы последовательности – это ее максимальный и минимальный частичные пределы.

8. Числами Фибоначчи называется последовательность чисел $\{f_n\}$, заданная рекуррентно: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, и найдите его.

9. Докажите, что $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ при $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > -1$ (неравенство Я. Бернулли).

10. (а) Докажите, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает.

(б) Докажите, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится. Предел этой последовательности обозначают

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

11. Докажите, что число $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ равно пределу последовательности

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

12. Докажите иррациональность числа e . (Указание: Предположите обратное. Оцените величину $|e - a_n|$ и докажите, что она не может быть рациональной.)