

## Векторы, точки и прямые.

Через  $\mathbb{k}^2$  обозначается 2-мерное координатное *векторное* пространство над полем  $\mathbb{k}$  (всюду кроме [зад. Г1♦4](#) можно считать, что  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ). Все точечные фигуры живут в ассоциированном с  $\mathbb{k}^2$  *аффинном* пространстве  $A_2 = A_2(\mathbb{k})$ . Прямые *определяются* как на лекции, и задачи надо решать исходя именно из этого определения.

- Г1♦1 (правило Крамера).** Найдите точку пересечения прямых  $a_1x_1 + a_2x_2 = \alpha$  и  $b_1x_1 + b_2x_2 = \beta$  в  $A_2$ , и докажите, что две прямые в  $A_2$  либо совпадают, либо не пересекаются и имеют пропорциональные векторы скорости, либо пересекаются ровно в одной точке.
- Г1♦2.** Напишите уравнение прямой в  $A_2(\mathbb{R})$ , проходящей: а) через точку  $(2, -3)$  параллельно вектору  $(5, 2)$  б) через точки  $(-3, 5)$  и  $(4, -1)$  и нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями в)  $3x_1 + 5x_2 = -1$  г)  $2x_1 - 3x_2 = 5$ . Найдите точку и угол пересечения всех шести пар прямых и расстояния от всех прямых до начала координат.
- Г1♦3.** Лежат ли на одной прямой в  $A_2$ : а) середины диагоналей и середина отрезка с концами в точках пересечения боковых сторон произвольного четырёхугольника? б) пересечение боковых сторон, пересечение диагоналей и середины оснований произвольной трапеции?
- Г1♦4.** Сколько прямых имеется на плоскости над конечным полем  $\mathbb{k}$ , состоящем из  $q$  чисел?
- Г1♦5 (группирование масс).** Пусть набор точек  $p_i$  с весами  $\mu_i$  и набор точек  $q_j$  с весами  $\nu_j$  имеют центры масс  $c_p$  и  $c_q$  соответственно, причём все три суммы  $\sum \mu_i$ ,  $\sum \nu_j$  и  $\sum \mu_i + \sum \nu_j$  ненулевые. Совпадает ли центр масс объединения этих наборов<sup>1</sup> с центром масс пары точек  $c_p$  и  $c_q$ , взятых с весами  $\sum \mu_i$  и  $\sum \nu_j$ ?
- Г1♦6.** Нарисуйте все точки в  $A_2(\mathbb{R})$ , барицентрические координаты<sup>2</sup>  $(\alpha, \beta, \gamma)$  которых относительно данного  $\triangle ABC$  удовлетворяют условиям: а)  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  б)  $\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$  в)  $\alpha = \beta$  г)  $\alpha, \beta > 1/3, \gamma > 0$  д)  $\alpha \geq \beta$  е)  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$  и напишите условия на  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , задающие: ж) 6 треугольников, на которые  $\triangle ABC$  разрезается медианами з) треугольники гомотетичные  $\triangle ABC$  с коэффициентами 3 и  $1/3$  относительно точки пересечения медиан.
- Г1♦7 (Теорема Чевы).** Пусть на прямых  $BC, AC$  и  $AB$ , соединяющих три неколлинеарных точки  $A, B, C$ , отмечены точки  $A_1 = \alpha_B B + \alpha_C C, B_1 = \beta_A A + \beta_C C, C_1 = \gamma_A A + \gamma_B B$ . Покажите, что в точки  $A, B, C$  можно поместить веса  $\alpha, \beta, \gamma$  так, что центр тяжести точек  $A$  и  $B$  находится в точке  $C_1$ , точек  $B$  и  $C$  — в точке  $A_1$ , а точек  $C$  и  $A$  — в точке  $B_1$ , если и только если  $\frac{\alpha_B}{\alpha_C} \cdot \frac{\beta_C}{\beta_A} \cdot \frac{\gamma_A}{\gamma_B} = 1$ . Выведите из этого необходимое и достаточное условие прохождения трёх прямых  $(AA_1), (BB_1), (CC_1)$  через одну точку.
- Г1♦8 (теорема Менелая).** Покажите, что точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , лежащие на прямых  $BC, CA$  и  $AB$  соответственно, коллинеарны, если и только если  $(\overline{A_1B} : \overline{A_1C}) \cdot (\overline{B_1C} : \overline{B_1A}) \cdot (\overline{C_1A} : \overline{C_1B}) = 1$ .
- Г1♦9.** Дана замкнутая ломаная с нечётным числом вершин. Обозначим через  $s_1, s_2, \dots, s_m$  середины её последовательных сторон, через  $x_0$  — произвольную точку, а через  $x_i$  — результат центрально симметричного отражения точки  $x_{i-1}$  относительно точки  $s_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, m$ . Всегда ли середина отрезка  $[x_0, x_m]$  является вершиной данной ломаной?
- Г1♦10<sup>\*</sup>.** Каждая сторона выпуклого четырёхугольника разделена на 3 равные части и соответственные точки деления на противоположных сторонах соединены так, что четырёхугольник разбивается на 9 меньших четырёхугольников. Найдите отношение площади среднего из них к площади исходного четырёхугольника.
- Г1♦11<sup>\*</sup>.** Векторы  $v_1, v_2, \dots, v_n \in A_2(\mathbb{R})$  идут из начала координат  $O$  в вершины правильного  $n$ -угольника с центром в  $O$ , но занумерованы случайно. Может ли удвоенная площадь этого многоугольника оказаться меньше суммы  $\det(v_1, v_2) + \det(v_2, v_3) + \dots + \det(v_{n-1}, v_n) + \det(v_n, v_1)$ ?

<sup>1</sup>«объединение» совпадающих точек заключается в сложении их весов

<sup>2</sup>Напомним, что  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
г			
3а			
б			
4			
5			
6а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
з			
7			
8			
9			
10			
11			