

Комплексы

Задача 5.1. Вычислите относительные гомологии а) $H(D^2, \partial D^2)$; б) $H(S^2, S^0)$.

Задача 5.2. Вычислите (клеточные) гомологии $\mathbb{R}P^n$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$.

Задача 5.3. а) Любой комплекс векторных пространств над полем k может быть получен как прямая сумма фрагментов вида $0 \rightarrow k \xrightarrow{id} k \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow k \rightarrow 0$.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для комплексов свободных абелевых групп конечного ранга.

Задача 5.4. Если у CW-комплекса c_i клеток размерности i , то $\sum (-1)^i c_i = \sum (-1) b_i$, где $b_i = \text{rk } H_i(X)$.

(Вместе с корректностью определения гомологий это дает корректность определения эйлеровой характеристики.)

Задача 5.5. $H_i(X; \mathbb{Z}/p) \cong (H_i(X) \otimes \mathbb{Z}/p) \oplus H_{i-1}(X)^{(p)}$, где $G^{(p)}$ — p -кручение группы G . (Предостережение: этот изоморфизм неканонический!)

Задача 5.6. $\tilde{H}(X) = 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{H}(X; \mathbb{Q}) = 0$ и $\tilde{H}(X; \mathbb{Z}/p) = 0$ для всех простых p .