

## Полнота и пополнение

**5♦1.** Покажите, что полнота пространства не топологическое свойство.

**5♦2.** Покажите, что пространство  $\ell_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}, \sup_n \{|a_n|\} < \infty \}$  полно относительно метрики

$$\rho(c_n, d_n) = \sup_{1 \leq i < \infty} |c_i - d_i|.$$

**5♦3.** Покажите, что пространство  $C[0, 1]$  непрерывных функций  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  полно относительно метрики

$$\rho(g, h) = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - h(x)|.$$

**5♦4. а)** Покажите, что предел последовательности  $f_n \in C[0, 1]$  такой что для всякого  $x \in [0, 1]$  последовательность  $f_n(x)$  сходится к некоторому значению  $f(x)$  может не лежать в  $C[0, 1]$ .

**б)** Покажите, что в существует хотя бы одна точка  $x \in [0, 1]$  в которой  $f(x)$  всё-таки непрерывна.

**5♦5. а)** Покажите, что отображение  $f: X \rightarrow X$  удовлетворяющее условию  $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$  может не иметь неподвижных точек.

**б)** Покажите, что если отображение  $f^n: X \rightarrow X$  сжимающее, то отображение  $f$  может не иметь неподвижных точек.

**в)** Что нужно исправить в предыдущем пункте, чтобы неподвижная точка была?

**5♦6.** Покажите, что если для некоторого  $\varepsilon > 0$  сжимающие отображения  $f, g: X \rightarrow X$  таковы что  $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$ , то расстояние между их неподвижными точками не превосходит  $\varepsilon/(1 - \alpha)$ , где  $\alpha = \min(\alpha_f, \alpha_g)$ .

**5♦7.** Покажите, что для любой последовательности  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$  при условии  $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |A_{ij}| < 1$  бесконечная система линейных уравнений

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} x_j + b_i$$

имеет единственное решение лежащее в  $\ell_\infty$ .

**5♦8.** Покажите, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.