Лекция 3. 21.09.2021.

Как мы доказали на прошлой лекции, функция $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ допускает мероморфное продолжение во всё $\mathbb{C}$ с простыми полюсами в $s=1$ и $s=0$. Одно из следствий этого утверждения состоит в том, что $\zeta(s)$ имеет нули в $s=-2k$.

<u>Следствие 1</u> $\zeta(-2k)=0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

В самом деле, $\zeta(1+2k) > 0 \Rightarrow$ предел

$\lim\limits_{s \to -2k} \zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}$ существует и является

ненулевым числом $\Rightarrow$ так как полюс $\Gamma(s/2)$ должен чем-то

гаситься, $\zeta(s) \xrightarrow[s \to -2k]{} 0$, причем порядок нуля 1.

Нули в $s = -2, -4, -6, \ldots$ называются тривиальными нулями

$\zeta(s)$.

Можно также спросить, что сообщает нам функциональное

уравнение о полюсах $\zeta(s)$.

$\zeta(s) = \xi(s)\pi^{s/2}\Gamma(s/2)^{-1}$, так что возможные

полюса $\zeta(s)$ при $s \neq 0, 1$ соответствуют нулям

$\Gamma(s/2)$. Оказывается, впрочем, что $\Gamma(s)$ не имеет нулей.

Теорема 1 $\Gamma(s)^{-1} = s e^{\gamma s} \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n}$

Доказательство:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n e^{-x} x^{s-1} dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx.$$

(Законность такого перехода — упражнение)

Последний интеграл берется для всех n: сделаем замену $x = nt$

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\,dx = n^s \int_0^1 (1-t)^n t^{s-1}\,dt$$

Интегрируем по частям:

$$n^s \int_0^1 (1-t)^n t^{s-1}\,dt = n^s \int_0^1 (1-t)^n\, d\frac{t^s}{s} = n^s \cdot \frac{n}{s} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^s\, d$$

$$= n^s \cdot \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s+1} \cdot \frac{n-2}{s+2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n+s-1} \cdot \int_0^1 t^{n+s-1}\,dt \text{, так что}$$

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\ldots(s+n)}$$

Заметим, что тогда

$$\Gamma(s)^{-1} = \lim_{n\to+\infty} n^{-s} \cdot s \cdot \left(1+\frac{s}{1}\right)\ldots\left(1+\frac{s}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{-s} \cdot s \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}} \cdot e^{sH_n}$$

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$n^{-s} e^{sH_n} = n^{-s} \cdot n^s \cdot e^{\gamma s} \cdot e^{O\left(\frac{|s|}{n}\right)} \to e^{\gamma s}, \text{ ~~это~~ что и}$$

завершает доказательство.

Scanned by TapScanner

P.S. Произведение сходится, потому что при больших n имеем

$$\ln\left(\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}\right) = \ln\left(1+\frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n} = O\left(\frac{|s|^2}{n^2}\right).$$

Тем самым, никаких нулей у $\Gamma(s)$, действительно, нет

и

<u>Следствие 2</u> $\zeta(s)$ допускает мероморфное продолжение во всё $\mathbb{C}$ с единственным простым полюсом в $s=1$.

<u>Следствие 3</u> (формула отражения)

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

<u>Д-во:</u>

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = -s\Gamma(s)\Gamma(-s) = -s \cdot s^{-1}(-s^{-1}) \cdot e^{\gamma s} \cdot e^{-\gamma s} \cdot$$

$$\cdot \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}-\frac{s}{n}} = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)^{-1} = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad \square$$

<u>Следствие 4</u> (формула удвоения)

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2s).$$

Д-во:

Заметим, что

$$\frac{\Gamma(s)^{-1}}{se^{\gamma s}} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}, \text{ так что}$$

$$\frac{\Gamma(2s)^{-1}}{2se^{2\gamma s}} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{2s}{n}\right)e^{-\frac{2s}{n}} = \prod_{\text{чётн}} \cdot \prod_{\text{и нечётн}} =$$

$$= \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}} \cdot \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{2s}{2n-1}\right)e^{-\frac{2s}{2n-1}} =$$

$$= \frac{\Gamma(s)^{-1}}{se^{\gamma s}} \cdot X.$$

Сравним теперь X со сходным произведением для $\Gamma(s+\frac{1}{2})$:

$$\frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{e^{\gamma(s+\frac{1}{2})}(s+\frac{1}{2})} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{s+\frac{1}{2}}{n}\right)e^{-\frac{s+\frac{1}{2}}{n}} = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{2s+2n+1}{2n}\cdot e^{-\frac{s}{n}-\frac{1}{2n}} =$$

$$= \prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2s+2n+1}{2n+1}\right)e^{-\frac{2s}{2n+1}} \cdot \left(\frac{2n+1}{2n}e^{-\frac{s}{n}+\frac{2s}{2n+1}} \cdot e^{-\frac{1}{2n}}\right) =$$

$$= \frac{X}{(1+2s)e^{-2s}} \cdot C \cdot \exp\left(s\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{n}+\frac{2}{2n+1}\right)\right)\right), \text{ так что}$$

Scanned by TapScanner

$$\frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{e^{\gamma(s+\frac{1}{2})}(s+\frac{1}{2})} = \frac{cx}{(1+2s)}2^{2s} \quad \text{и}$$

$$\Gamma(s)\,\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) = C_1 2^{1-2s}\,\Gamma(2s)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

эквивалентно

для некоторого C_1.

При $s=1$ получим

$$\Gamma(1)\Gamma(3/2) = C_1 \cdot 2^{-1}\,\Gamma(2) \Rightarrow C_1 = 2\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

что и завершает доказательство.

<u>Теорема 2</u> $\forall \delta > 0 \quad -\pi+\delta \le \arg s \le \pi - \delta$

$$\ln\Gamma(s) = (s-\tfrac{1}{2})\ln s - s + \tfrac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\tfrac{1}{|s|}\right).$$

<u>Д-во</u>: По Теореме 1,

$$\ln\Gamma(s) = -\gamma s - \ln s + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{s}{n} - \ln\left(1+\frac{s}{n}\right)\right) = -\gamma s - \ln s +$$

$$+\lim_{N\to+\infty}\left(s\Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_3\right), \text{ где}$$

Это логарифм от ф-лы Стирлинга

$$\Sigma_1 = \sum_{n\le N} 1/n = \ln N + \gamma + O\left(\tfrac{1}{N}\right)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{0<n<N+1/2} \ln(n+s) \quad \text{и} \quad \Sigma_3 = \sum_{n\le N}\ln n = \ln N! =$$

$$= N\ln N - N + \tfrac{1}{2}\ln N + \tfrac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\tfrac{1}{N}\right)$$

Суммированием по частям Σ_3 превращается в

$$\Sigma_3 = \int_0^{N+1/2} \ln(x+s)\,dx - \int_0^{N+1/2} \frac{\rho(x)}{x+s}\,dx - \frac{1}{2}\ln s =$$

$$= \left(N+\frac{1}{2}+s\right)\ln\left(N+\frac{1}{2}+s\right) - N - \frac{1}{2} - s\ln s - \frac{1}{2}\ln s - \int_0^{N+1/2}\frac{\rho(x)}{x+s}\,dx,$$

где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$.

Интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\rho(x)}{x+s}\,dx$ сходится, т.к. $\rho(x)\,dx = d\sigma(x)$ для ограниченной ф-ии σ $\Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\rho(x)}{x+s}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{d\sigma(x)}{x+s} = \int_0^{+\infty}\frac{\sigma(x)}{(x+s)^2} \ll \frac{1}{|s|}$$

Доказательство завершается раскрытием скобок при помощи равенства $\ln\left(N+\frac{1}{2}+s\right) = \ln N + \frac{\frac{1}{2}+s}{N} + O\left(\frac{|s}{N}\right.$

$\square$

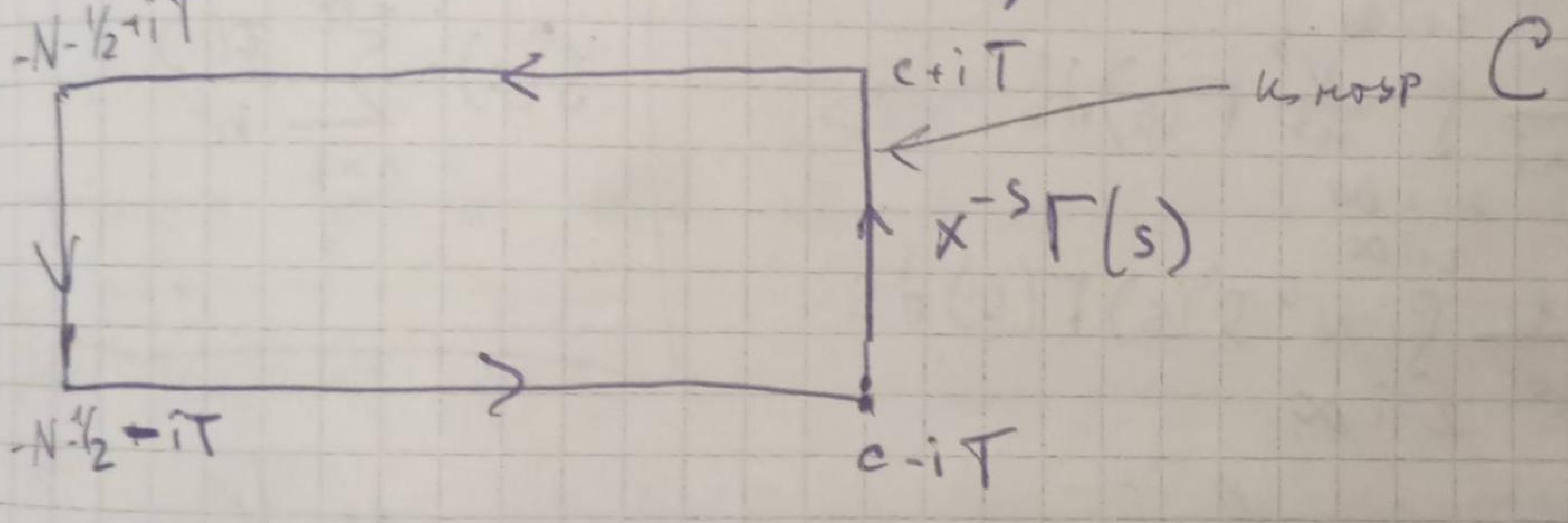
Одно из следствий Теоремы 2 состоит в том, что для ограниченных сверху и снизу σ функция $|\Gamma(\sigma+it)|$ убывает экспоненциально по t.

Пользуясь этим соображением и формулой удвоения, а также функциональным уравнением для $\zeta(s)$, можно получать интересные формулы для взвешенных сумм мультипликативных функций. Начнём с этой полезной леммы:

Лемма 1 $\forall\, x, c > 0$

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\,\Gamma(s)\,ds.$$

Д-во: Выберем $N \in \mathbb{N}$ и для больших $T>0$ рассмотрим контурный интеграл



По формуле Коши,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C x^{-s}\,\Gamma(s)\,ds = \sum_{k\le N}\operatorname*{Res}_{s=-k}\Gamma(s)\,x^{-s} = \sum_{k\le N}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$$

— это часть ряда Тейлора для e^{-x}. Интегралы по горизонтальным сегментам убывают экспоненциально по T, так что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)x^{-s}dx = \sum_{k\le N}\frac{(-1)^k}{k!}x^k + \frac{1}{2\pi i}\int_{N-\frac{1}{2}-i\infty}^{N+\frac{1}{2}-i\infty}\Gamma(s)x^{-s}dx.$$

Несложно показать (например, применив формулу $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$), что интеграл справа ~~[illegible]~~ стремится к 0 при $N\to+\infty$ $\square$.

Пример 1 Степенная сумма $\tau(n)$:

$$S(N)=\sum_{n=1}^{+\infty}\tau(n)e^{-n/N}$$

$$e^{-n/N}=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{N^s}{n^s}\Gamma(s)ds \Rightarrow$$

$$\boxed{\zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}}$$

$$S(N)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}N^s\zeta^2(s)\Gamma(s)ds$$

Сдвинем контур влево на линию $\sigma=-M-\frac{1}{2}$, получим

$$S(N)=\sum \operatorname{Res} N^s\zeta^2(s)\Gamma(s)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-M-\frac{1}{2}-i\infty}^{-M-\frac{1}{2}+i\infty}N^s\zeta^2(s)\Gamma(s)ds$$

Легко показать, что интеграл справа есть $O(N^{-M-\frac{1}{2}})$.

Полюса находятся в $S = 1, 0, -1, \ldots$

Получаем

$$S(N) = \operatorname*{Res}_{s=1} N^s \zeta^2(s)\Gamma(s) + \sum_{0 \le k \le M} N^{-k}\zeta^2(-k)\cdot\frac{(-1)^k}{k!} + O(N^{-M-1})$$

$\Gamma'(1) = -\gamma$, так что

$$\operatorname*{Res}_{s=1} N^s\zeta^2(s)\Gamma(s) = N\ln N + N\gamma.$$

Таким образом, мы получили формулу для $S(N)$, в которой естественно появляются члены разложения $\zeta(s)$, но при этом отсутствуют слагаемые неясной природы, вроде $\sum_{n \le N} \tau(n) - N\ln N - (2\gamma-1)N$.

На прошлой лекции мы обнаружили, что сумма $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$ испытывает намного более сильные сокращения, т.е.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 + O\left(e^{-\frac{\pi}{t}}\right)\right)$$

и при $t \to 0$ не возникает никаких полиномиальных по t слагаемых, кроме $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Оказывается, при помощи функционального уравнения для $\zeta(s)$ того же эффекта можно добиться для $\sigma_3(n)$ и $\sigma_1(n)$.

Примеры 2 и 3

Будем рассматривать

$$Q(N) = \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) e^{-\frac{2\pi n}{N}}$$

$$P(N) = \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n) e^{-\frac{2\pi n}{N}}$$

Для того, чтобы работать с P и Q, заметим сначала, что

$$\underbrace{\sum \frac{\sigma_3(n)}{n^s}}_{=: f(s)} = \zeta(s)\zeta(s-3) \qquad g(s) := \sum \frac{\sigma_1(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1)$$

f и g удовлетворяют функциональным уравнениям

А именно, $f(4-s) = \zeta(4-s)\zeta(1-s) = \zeta(1-s)\zeta(1-(s-3))$.

Далее,

$$\xi(1-s) = \frac{\pi^{\frac{1-s}{2}} \cdot \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \pi^{\frac{1}{2}-s}\,\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\,\zeta(s)$$

$$\zeta(4-s) = \pi^{\frac{1}{2}+3-s}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-s}{2}\right)}\,\zeta(s-3) \Rightarrow$$

$$f(4-s) = \pi^{4-2s}\,\frac{\Gamma(s/2)\,\Gamma\left(\frac{s-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-s}{2}\right)}\,f(s)$$

Заметим, что $\Gamma(s/2)\Gamma\left(\frac{s-3}{2}\right) = \dfrac{\Gamma(s/2)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\frac{s-1}{2}\cdot\frac{s-3}{2}} =$

$= \dfrac{4}{(s-1)(s-3)} \cdot 2^{1-s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)$ и

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-s}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{4-s}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5-s}{2}\right)}{\frac{3-s}{2}\cdot\frac{1-s}{2}} = \frac{4}{(s-1)(s-3)}\cdot 2^{s-3}\sqrt{\pi}\,\Gamma(4-s)$$

$\Rightarrow (2\pi)^{-s}\Gamma(s)f(s)$ симметрична относительно замены $s \to 4-s$.

Аналогичное верно для $g(s)$:

$$(2\pi)^{2-s}\,\Gamma(2-s)\,g(2-s) = -(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,g(s).$$

обратите внимание на минус

Далее, $Q(N) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{5-i\infty}^{5+i\infty} f(s) N^s (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\,ds$

В силу того, что $\zeta(-2k)=0$ $\forall k\geq 1$, $f(s)$ имеет нули в всех $-k$ при $k\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Это означает, в частности, что

$$Q(N) = \operatorname*{Res}_{s=4} f(s)N^s(2\pi)^{-s}\Gamma(s) + \operatorname*{Res}_{s=0} f(s)N^s(2\pi)^{-s}\Gamma(s) +$$

$$+\int\limits_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} f(s)N^s(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\,ds = \frac{N^4}{240} - \frac{1}{240} + \int\limits_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} f(s)(2\pi)^{-s}\Gamma(s)N^s ds.$$

В интеграле справа замена $s \to 4-s$ превратит $f(s)(2\pi)^{-s}\Gamma(s)N^s$ в $\underbrace{(2\pi)^{-s}f(s)\Gamma(s)}_{\text{инв!}} N^{4-s} \Rightarrow$

$$Q(N) = \frac{N^4}{240} - \frac{1}{240} + N^4 Q(N^{-1})$$

это частный случай модулярности!

Аналогично, для $P(N)$ получаем

$$P(N) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{3-i\infty}^{3+i\infty} g(s)\cdot(2\pi)^{-s}\Gamma(s)N^s ds =$$

$$= \left(\operatorname*{Res}_{s=2} + \operatorname*{Res}_{s=1} + \operatorname*{Res}_{s=0}\right) g(s)(2\pi)^{-s}\Gamma(s)N^{-s} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} g(s)(2\pi)^{-s}\Gamma(s)N^{-s}\,ds =$$

$$= \frac{N^2}{24} - \frac{N}{4\pi} + \frac{1}{24} - P(N^{-1})N^2$$

Следствие последнего рАвенства - следующее занимательное явление:

Если $\Delta(N) = e^{-2\pi N}\prod_{n=1}^{+\infty}(1-e^{-2\pi n N})^{24}$, то

$$\ln\Delta(N) = 24\sum_n \ln\left(1-e^{-\frac{2\pi n}{N}}\right) - 2\pi N = -2\pi N - 24\sum_{a,b} \frac{e^{-\frac{2\pi a b}{N}}}{a} =$$

$$= -2\pi N - 24\sum_n \frac{\sigma_1(n)}{n} e^{-2\pi n N} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta'}{\Delta}(N) = -2\pi + 48\pi P(N^{-1}) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta'}{\Delta}(N) + \frac{12}{N} = -\frac{\Delta'}{\Delta}(N^{-1})\cdot N^{-2} \Rightarrow$$

$$\Delta(N^{-1}) = N^{12}\Delta(N).$$

Коэффициент $\tau(n)$ при $e^{-2\pi n N}$ в произведении $e^{-2\pi N}\prod_n(1-e^{-2\pi n N})^{24}$ называется

τ-функцией Рамануджана
(это не τ, которая число делителей, а совсем другая функция)
Удивительным образом, оказывается, что τ(n) мультипликативна, но доказательство этого факта требует более глубокого рассмотрения модулярных форм и операторов Гекке, чем в этом курсе не будет. Приведенное выше док-во было нужно для того, чтобы показать пользу функционального уравнения для ζ(s) для изучения сумм такого типа.