Дзета-функция Римана.
Листок 1

(a,b) — это наибольший общий делитель a и b, $f \ll g$ значит, что $f = O(g)$, $f \asymp g$ означает, что $f \ll g$ и $g \ll f$.

Задача 1.

а) Докажите, что существуют такие рациональные числа B_n, что в окрестности нуля выполнено равенство

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

б) Докажите, что $B_1 = -\frac{1}{2}$ и $B_{2k+1} = 0$ при $k \geq 1$.

в) Найдите B_2 и B_4.

Задача 2. Покажите, что при $k \geq 0$ выполнено равенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k e^{-n/N} = k! N^{k+1} + (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1} + O(N^{-1}).$$

Таким образом, регуляризованное значение суммы

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots$$

есть $(-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1}$.

Задача 3.

а) Пусть $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$. Покажите, что функция

$$\sigma(x) = \int_0^x \rho(u) du$$

1-периодична.

б) При помощи суммирования по частям покажите, что существует константа $c > 0$ такая, что при $N \to +\infty$ выполнено

$$N! \sim c\sqrt{N} \left(\frac{N}{e} \right)^N.$$

в) Докажите, что

$$c = e^{-\zeta'(0)}.$$

Задача 4. Пусть

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} (n,k),$$

Докажите равенство формальных рядов Дирихле

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)^2}{\zeta(s)},$$

Задача 5.

а) Пользуясь асимптотической формулой для гармонических чисел H_n, покажите, что

$$\prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \gg \ln n.$$

б) Из произведения Эйлера для $\zeta(s)$ выведите оценку

$$\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} \ll \ln n$$

Подсказка: Рассмотрите ряд для $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ при $s = 1 + (\ln n)^{-1}$.

в) Покажите, что

$$\prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \asymp \ln n$$

Задача 6.

а) Воспользовавшись формулой суммирования Пуассона, покажите, что

$$\pi \coth \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2}.$$

б) Найдите

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).$$