

Влияние инструментов управления транспортной сетью на равновесное распределение потоков

Дорн Ю.В.
dorn@pisem.net

Анализ данных и оптимизация в математическом моделировании
транспортных потоков

24.03.2012

- Введение
 - Равновесные модели. Принципы Вардропа.
 - Модель Бэкмана.
 - Модель стационарной динамики (Нестеров-де Пальма). Описание, примеры.
- Введение светофоров в модель стационарной динамики
 - Основная задача
 - «Рубка» Брайеса и неоднозначность оптимального выбора параметров светофора.
- Использование платных дорог в рамках модели Бэкмана.
- Спасибо за внимание!

Принципы Вардропа:

1. Агент ведет себя оппортунистически, стараясь при выборе маршрута минимизировать собственные издержки.
2. Агенты выбирают маршруты стараясь минимизировать общие транспортные расходы в сети.

Агенты считают свое влияние незначительным.

Равновесные модели распределения потоков

$\Gamma(V, E)$ – ориентированный транспортный граф

V – множество вершин

$E = V \times V$ – множество дуг, $|E| = m$

$S \subseteq V$ – множество истоков

$D \subseteq V$ – множество стоков

$W = \{w = (i, j) : i \in S, j \in D\}$ – множество пар исток – сток

$\rho_w = \rho_{ij}$ – соответствующая паре (i, j) корреспонденция

$\rho = \{\rho_w : w \in W\}$ – матрица корреспонденций

P_w – множество альтернативных маршрутов для w

$P = \bigcup_{w \in W} P_w$ – множество всех путей на Γ

Равновесные модели распределения потоков

x_p – величина потока по пути $p \in P$

$X_w = \left\{ x_p \geq 0 : p \in P_w, \sum_{p \in P_w} x_p = \rho_w \right\}$ – множество допустимых

значений x_p для пары w

$\vec{x} = (x_p : p \in P)$

$X = \prod_{w \in W} X_w = \left\{ \vec{x} \geq 0 : w \in W, \sum_{p \in P_w} x_p = \rho_w \right\}$ – множество

допустимых значений для x

$G_p = G_p(\vec{x})$ – удельные затраты агента

на проезд по маршруту p

Равновесные модели распределения потоков

Условие равновесия: Если $x^ \in X$ – равновесное распределение потоков по маршрутам, то*

$$\text{из } x_p^* > 0, p \in P_w \Rightarrow G_p(x^*) = \min_{q \in P_w} G_q(x^*)$$

$$G(x) = (G_p(x) : p \in P)$$

Теорема 1: $x^ \in X$ – удовлетворяет условию равновесия тогда и только тогда, когда*

является решением вариационного неравенства:

$$G(x^*)(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in X$$

Теорема 2: Пусть $G(x)$ непрерывна по каждой компоненте. Если X ограничено, то вариационное неравенство разрешимо.

- Модель Бэкмана

f_e – поток по дуге $e \in E$

$$f_e = \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p$$

$$\Theta = \{ \delta_{ep} : e \in E, p \in P \}$$

$$\vec{f} = \{ f_e : e \in E \}$$

$$\vec{f} = \Theta \vec{x}$$

τ_e – удельные затраты на прохождение дуги e

$$\tau_e = \tau_e(f_e)$$

$$\vec{\tau}(\vec{f}) = \{ \tau_e(f_e) : e \in E \}$$

$$G_p = \sum_{e \in E} \delta_{ep} \tau_e(f_e)$$

$$G(\vec{x}) = \Theta^T \vec{\tau}(\vec{f})$$

• Модель Бэкмана

$$\frac{\partial G_p}{\partial x_q} = \sum_{e \in E} \delta_{ep} \frac{\partial \tau_e}{\partial f_e} \frac{\partial f_e}{\partial x_q} = \sum_{e \in E} \delta_{ep} \delta_{eq} \frac{\partial \tau_e}{\partial f_e} = \frac{\partial G_q}{\partial x_p} \Rightarrow$$

Равновесное распределение потоков определяется как решение оптимизационной задачи

$$g(\vec{x}) \rightarrow \min, \quad \vec{x} \in X$$

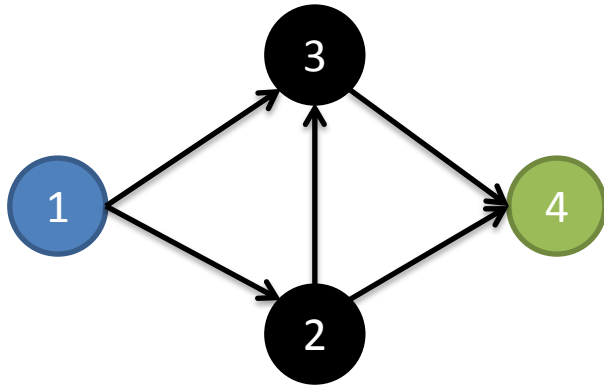
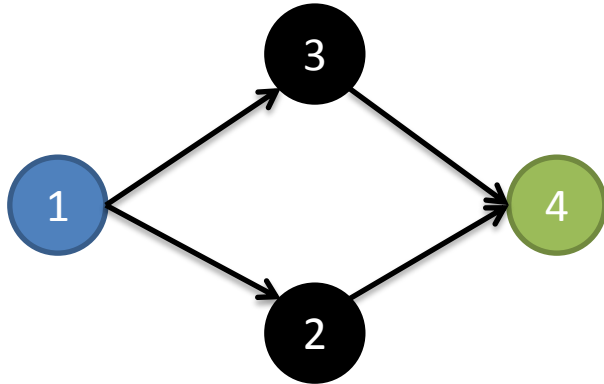
, где

$$g(\vec{x}) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} \tau_e(z) dz, \quad \vec{f} = \Theta \vec{x}$$

Предположение относительно вида $\tau_e(\bullet)$:

$\tau_e(\bullet)$ – непрерывная, монотонно возрастающая, выпуклая.

Парадокс Брайеса



Пример 1 (Парадокс Брайеса)

$$\Gamma_1(V, E, \vec{\tau}), \Gamma_2(V, E, \vec{\tau})$$

Выполнено :

$$f = 6 \quad - \text{поток из } 1 \text{ в } 4.$$

$$\tau_{12}(\vec{x}) = 10f_{12}, \tau_{13}(\vec{x}) = 50 + f_{13}$$

$$\tau_{34}(\vec{x}) = 10f_{34}, \tau_{24}(\vec{x}) = 50 + f_{24}$$

$$\tau_{23}(\vec{x}) = 10 + f_{23}$$

Тогда в равновесии

$$C_{(1,4)}^{\Gamma_1}(\vec{x}) = 83$$

$$C_{(1,4)}^{\Gamma_2}(\vec{x}) = 92$$

- Модель Бэкмана

Некоторые возможные расширения модели :

1) $\tau_e = \tau_e(\vec{f})$

2) $G_p(\vec{x})$ – неаддитивная

3) $\tau_e(\bullet)$ – ограниченная

Модель стационарной динамики (Нестеров-де Пальма)

Основные предположения :

1) *Выполняется первый принцип Вардрона*

2) *Каждому ребру e соответствует емкость \bar{f}_e .*

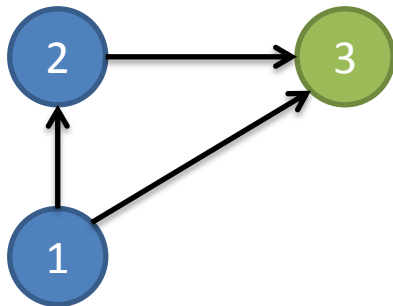
Всегда выполняется $f_e \leq \bar{f}_e$.

3) *Если $f_e < \bar{f}_e$, то $t_e = \bar{t}_e$.*

Если $f_e = \bar{f}_e$, то $t_e \geq \bar{t}_e$,

\bar{t}_e – время прохождения ребра e в свободном состоянии

Парадокс Брайеса



Пример 1 (Парадокс Брайеса)

$\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{t})$

Выполнено:

$$\bar{t}_{13} > \bar{t}_{12} + \bar{t}_{23},$$

$$\bar{f}_{34} < \rho_{(1,3)} + \rho_{(2,3)},$$

$$\bar{f}_{13} > \rho_{(1,3)}, \bar{f}_{12} > \rho_{(1,3)}, \bar{f}_{23} > \rho_{(2,3)}.$$

Тогда в равновесии

$$C_{(1,3)}(\vec{f}) = \bar{t}_{13}$$

$$C_{(2,3)}(\vec{f}) = \bar{t}_{13} - \bar{t}_{12}$$

$$\text{Суммарные издержки: } \rho_{(1,3)} \bar{t}_{13} + \rho_{(2,3)} (\bar{t}_{13} - \bar{t}_{12})$$

Если бы ребро 1–2 отсутствовало, то

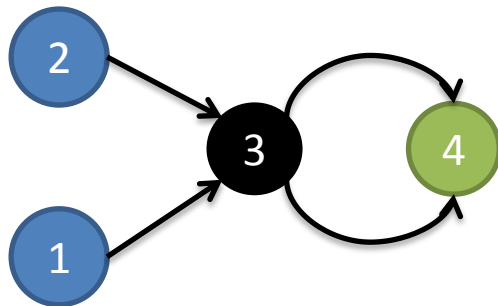
$$C_{(1,3)}(\vec{f}) = \bar{t}_{13}$$

$$C_{(2,3)}(\vec{f}) = \bar{t}_{23} < \bar{t}_{13} - \bar{t}_{12}$$

Пример 2

$\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{t})$

Выполнено :



$$\bar{t}_{34_up} < \bar{t}_{34_down},$$

$$\bar{t}_{34_up} \bar{f}_{34_up} < \rho_{(1,4)} + \rho_{(2,4)},$$

$$\bar{t}_{13} \bar{f}_{13} > \rho_{(1,4)}, \bar{f}_{23} \bar{t}_{23} > \rho_{(2,4)},$$

$$\bar{f}_{34_up} \bar{t}_{34_down} + \bar{f}_{34_down} \bar{t}_{34_down} > \rho_{(1,4)} + \rho_{(2,4)}.$$

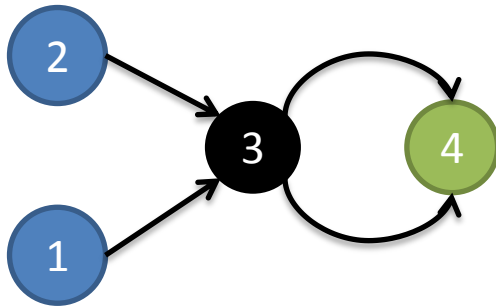
Тогда в равновесии

$$C_{(1,4)}(\vec{f}) = \bar{t}_{13} + \bar{t}_{34_down}$$

$$C_{(2,4)}(\vec{f}) = \bar{t}_{23} + \bar{t}_{34_down}$$

Суммарные издержки :

$$\rho_{(1,4)}(\bar{t}_{13} + \bar{t}_{34_down}) + \rho_{(2,4)}(\bar{t}_{23} + \bar{t}_{34_down})$$



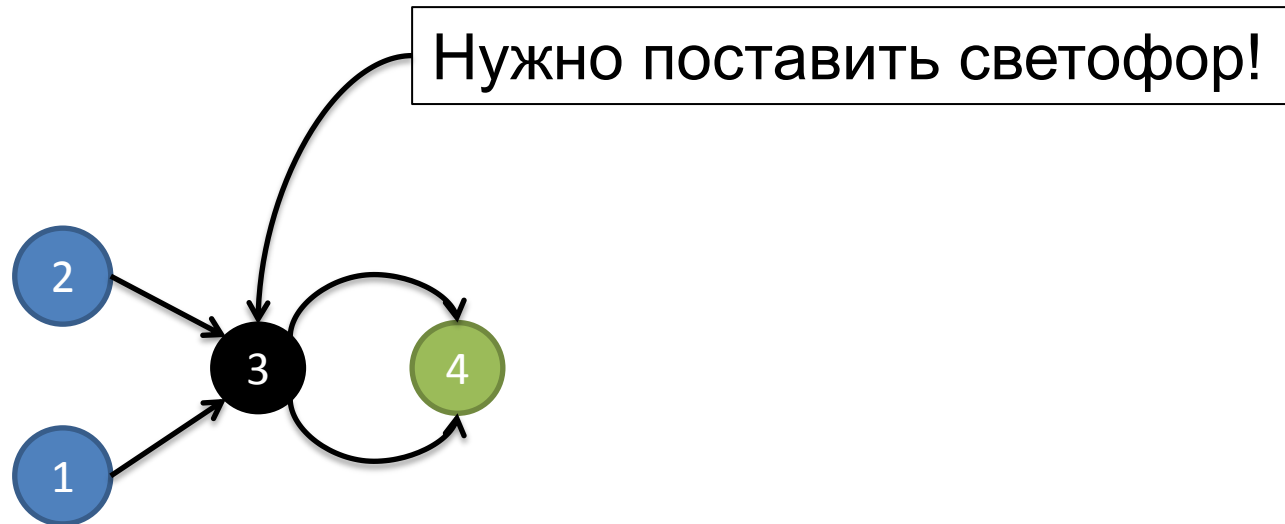
*Если возможна маршрутизация в вершине 3,
то всегда можно получить :*

$$\begin{cases} C_{(1,4)}(\vec{f}) = \bar{t}_{13} + \bar{t}_{34_up} \\ C_{(2,4)}(\vec{f}) = \bar{t}_{23} + \bar{t}_{34_down} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_{(1,4)}(\vec{f}) = \bar{t}_{13} + \bar{t}_{34_down} \\ C_{(2,4)}(\vec{f}) = \bar{t}_{23} + \bar{t}_{34_up} \end{cases}$$

Суммарные издержки :

$$\min(\rho_{(1,4)}(\bar{t}_{13} + \bar{t}_{34_up}) + \rho_{(2,4)}(\bar{t}_{23} + \bar{t}_{34_down}), \rho_{(1,4)}(\bar{t}_{13} + \bar{t}_{34_down}) + \rho_{(2,4)}(\bar{t}_{23} + \bar{t}_{34_up}))$$

Введение светофоров



Описание светофоров :

$$\Lambda = \|\alpha_{ij}\|^{m \times m}$$

$$\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}^T$$

$$\beta_i \leq \sum_{j \in E} \alpha_{ij}$$

Структура задачи меняется :

$$\Gamma(V, E, \bar{f}^{\max}, \bar{t}^{\min}, \Lambda, \beta)$$

, где

$$\bar{f}^{\max} = \bar{f} \mid (\beta = \vec{1})$$

$$\bar{t}^{\min} = \bar{t} \mid (\beta = \vec{1})$$

Влияние параметров светофора

$$\beta_i \rightarrow \beta_i - \Delta_i, (\beta_i - \Delta_i > 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(\Delta \bar{t}_i) = \left(\frac{(1 - \beta_i + \Delta_i)^2}{2} - \frac{(1 - \beta_i)^2}{2} \right) \cdot T_i = \left(1 - \beta_i + \frac{\Delta_i}{2} \right) \cdot \Delta_i \cdot T_i \Leftrightarrow \\ \Delta \bar{f}_i = (\beta_i - \Delta_i) \bar{f}_i^{\max} - \beta_i \bar{f}_i^{\max} = -\Delta_i \bar{f}_i^{\max} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{t}_i \rightarrow \bar{t}_i + \left(1 - \beta_i + \frac{\Delta_i}{2} \right) \cdot \Delta_i \cdot T_i \\ \bar{f}_i \rightarrow \bar{f}_i - \Delta_i \bar{f}_i^{\max} \end{cases}$$

Оптимальное управление светофорами

$$\min_{\Lambda, \vec{\beta}} \sum_{i \in E} f_i t_i^2$$

$$\beta_i \leq \max((\Lambda \cdot \vec{1}_m)_i, 1)$$

$$\vec{f} \leq \vec{f}^\beta$$

$$\vec{f}_i^\beta = \beta_i \vec{f}_i^{\max}$$

где t является решением задачи оптимизации

$$\max_{\vec{t} \geq \vec{t}^\beta} \left[\sum_{(i,j) \in OD} \rho_{ij} SP_{ij}(\vec{t}) - \sum_{k \in E} t_k \vec{f}_k^\beta \right] \quad (*)$$

$$\vec{t}_i^\beta = \vec{t}_i^{\min} + \frac{(1 - \beta_i)^2}{2} T_i$$

$$\vec{f} = \vec{f}^\beta - s$$

s – optimal dual multipliers (*)

Оптимальное управление светофорами

$$\min_{\Lambda, \vec{\beta}} \sum_{i \in E} f_i t_i^2$$

$$\beta_i \leq \max((\Lambda \cdot \vec{1}_m)_i, 1)$$

$$f \leq \bar{f}^\beta$$

$$\bar{f}_i^\beta = \beta_i \bar{f}_i^{\max}$$

где t является решением задачи оптимизации

$$\max_{t \geq \bar{t}^\beta} \left[\sum_{(i,j) \in OD} \rho_{ij} SP_{ij}(t) - \sum_{k \in E} t_k \bar{f}_k^\beta \right] \quad (*)$$

$$\bar{t}_i^\beta = \bar{t}_i^{\min} + \frac{(1 - \beta_i)^2}{2} T_i$$

$$f = \bar{f}^\beta - s$$

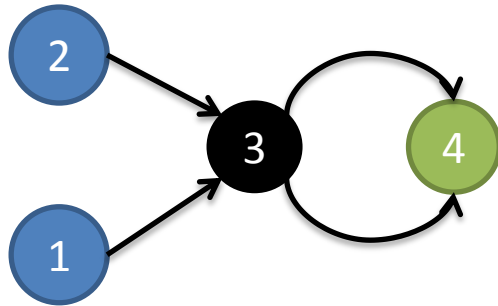
s – optimal dual multipliers (*)

Выглядит дико!

Пример 2

$$\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{t})$$

Выполнено :



$$\bar{t}_{34_up} < \bar{t}_{34_down},$$

$$\bar{f}_{34_up} \bar{t}_{34_up} < \rho_{(1,4)} + \rho_{(2,4)},$$

$$\bar{f}_{13} \bar{t}_{13} > \rho_{(1,4)}, \bar{f}_{23} \bar{t}_{23} > \rho_{(2,4)},$$

$$\bar{f}_{34_up} \bar{t}_{34_down} + \bar{f}_{34_down} \bar{t}_{34_down} > \rho_{(1,4)} + \rho_{(2,4)}.$$

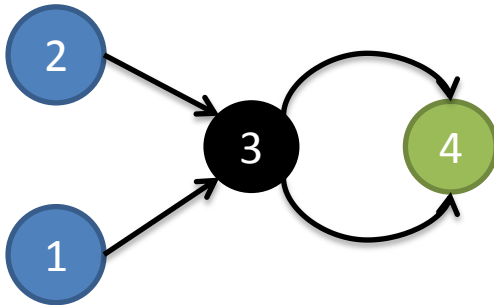
$$\rho_{(1,4)} > \rho_{(2,4)}, \bar{f}_{34_up} \bar{t}_{34_up} > \rho_{(1,4)}$$

Оптимальное управление :

$$\alpha_{134_up} = 1, \alpha_{134_down} = 0$$

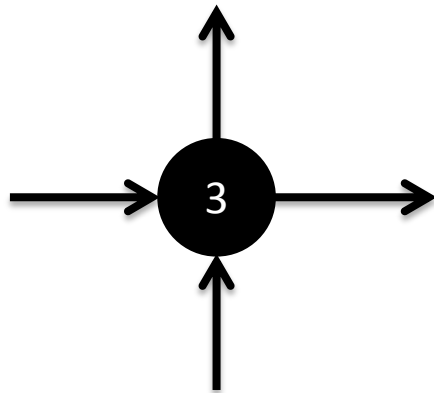
$$\alpha_{234_up} = 0, \alpha_{134_down} = 1$$

«Рубка» Брайеса



*Если $\alpha_{(134_up)} \neq 0$ и $\alpha_{(234_up)} \neq 0$, то
весь трафик перейдет на ребро 34_{up}*

*Если трафик на перекрестке 3 – нормируется,
то на ребрах 13 и 23 образуются пробки.*

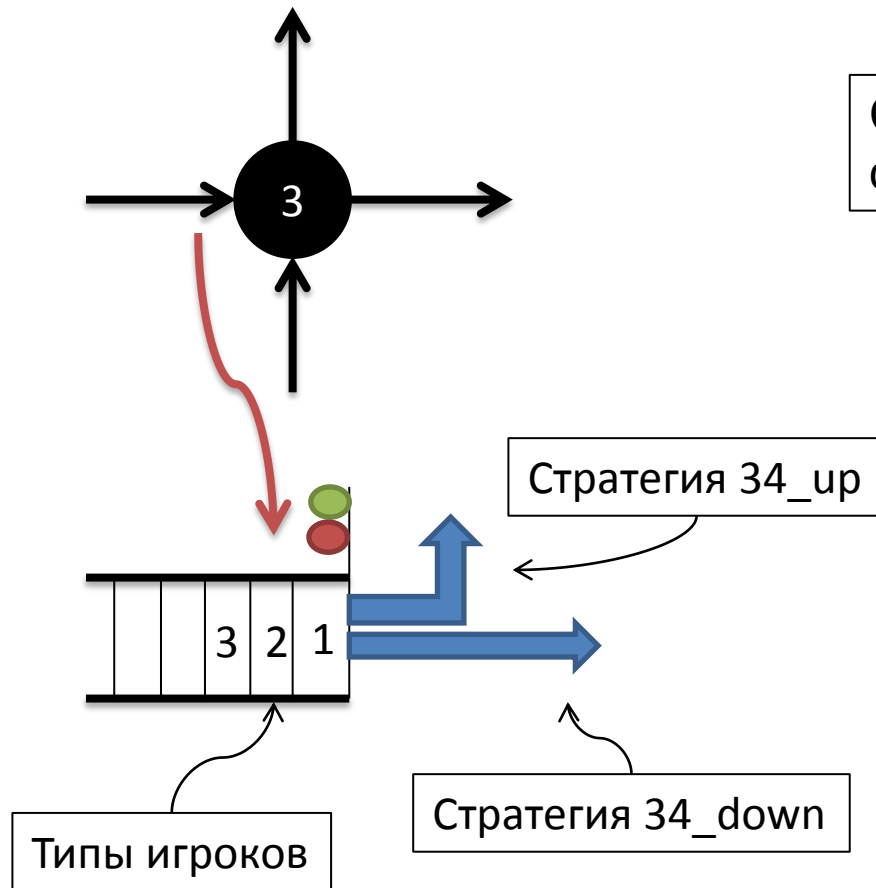


Выигрыша во времени нет!

Короткое обоснование 1:

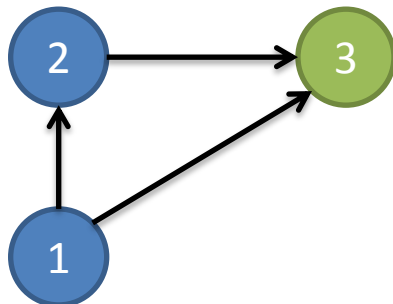
*Если бы выигрыш был, для одной OD – пары
существовало бы 2 (используемых) маршрута
с различными издержками пути.*

«Рубка» Брайеса



Стратегия 34_up для игроков 1-го типа строго доминирует стратегию 34_down

Неоднозначность оптимального выбора параметров



Оптимальное управление:

1) Для вершины 1:

$$\alpha_{12} = 0$$

2) Для вершины 2:

$$\alpha_{123} = 0$$

Возвращение Бэкмана



Введение платных дорог :

$$\vec{\tau}(\vec{x}) \rightarrow \vec{\tau}'(\vec{x}) = \vec{\tau}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})$$

$$\vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{0}, \quad \forall \vec{x} \in X$$

$$\Gamma(V, E, \vec{\tau}(\vec{x})) \rightarrow \Gamma(V, E, \vec{\tau}'(\vec{x}))$$

Простейшим примером является введение штрафов :

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{\tau}^c$$

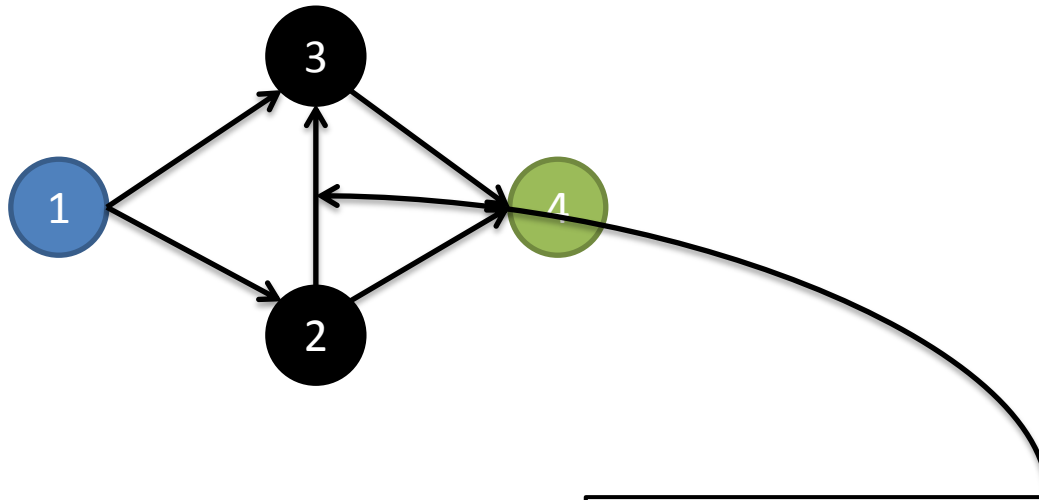
Вариант штрафов – "запретительные цены" :

$$\tau_i^c(\vec{x}) \gg \max_{\substack{x \in X \\ p \in E}} \tau_p(\vec{x}), \quad i \in J \subseteq E$$

Введение платы инициирует изменение точки равновесия системы.

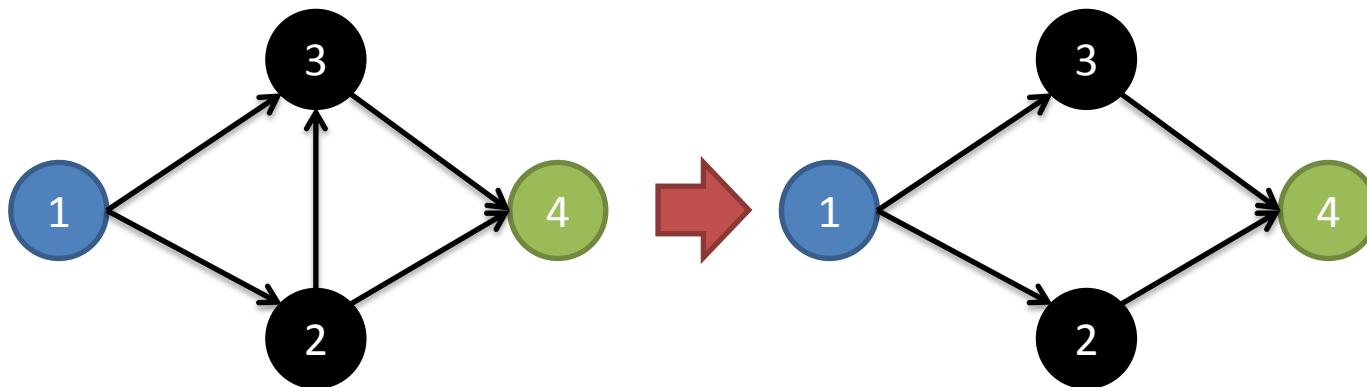
$$\vec{x}^* = \vec{x}^*(\vec{g}(\vec{x}^*))$$

Парадокс Брайеса



Первый кандидат на «запретительные цены»

Парадокс Брайеса и платные дороги



*Если установить штраф
за проезд по ребру 23 в размере
 $\tau_{23}^c = 92$ (как пример),
то парадокса Брайеса удастся избежать.*

Выбор целевой функции :

Мотив управления :

$$1) \vec{\tau}^c = \arg \min_{\vec{\tau}^c \geq 0} \left\langle f * (\vec{\tau}^c), \vec{\tau}(\vec{x}^*) \right\rangle$$

$$2) \vec{\tau}^c = \arg \min_{\substack{\vec{\tau}^c \geq 0 \\ f * (\vec{\tau}^c) \leq f^{\text{lim}}}} \left\langle f * (\vec{\tau}^c), \vec{\tau}(\vec{x}^*) \right\rangle$$

Мотив социального оптимума :

$$3) \vec{\tau}^c = \arg \min_{\vec{\tau}^c \geq 0} \left\langle f * (\vec{\tau}^c), \vec{\tau}(\vec{x}^*) + \vec{\tau}^c \right\rangle$$

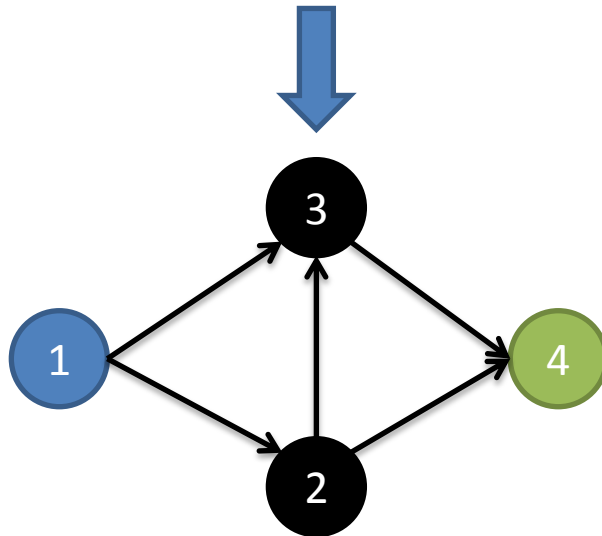
Мотив получения прибыли :

$$4) \vec{\tau}^c = \arg \max_{\vec{\tau}^c \geq 0} \left\langle f * (\vec{\tau}^c), \vec{\tau}^c \right\rangle$$

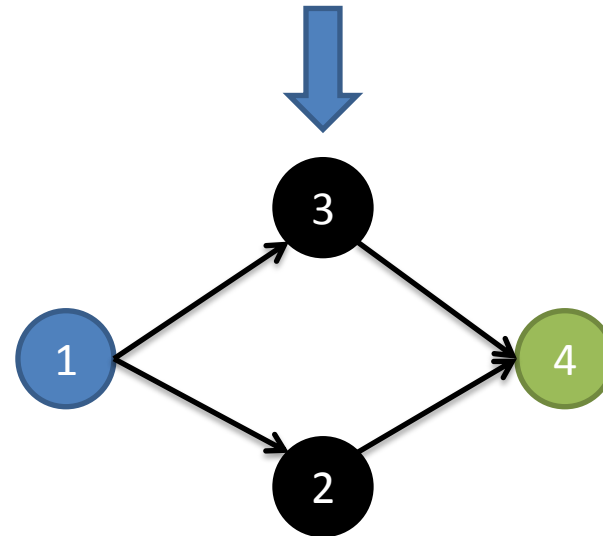
и другие...

Парадокс Брайеса

Эффективна при низкой
загрузке



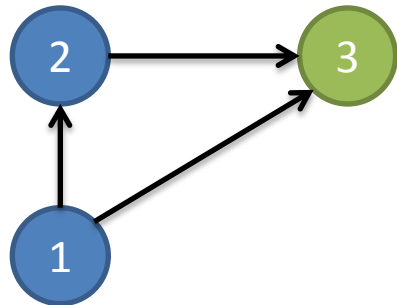
Эффективна при высокой
загрузке



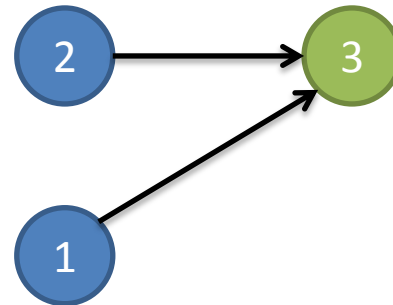
Плата должна зависеть от загрузки
сети и быть вариативной.

Парадокс Брайеса

Эффективна при низкой
загрузке



Эффективна при высокой
загрузке



Спасибо за внимание!