

Гомотопии

Задача 6.1. Любое не сюръективное отображение а) в S^1 ; б) в S^n гомотопно постоянному.

Задача 6.2. Может ли связное пространство быть гомотопически эквивалентно несвязному?

Задача 6.3. Лента Мёбиуса гомотопически эквивалентна окружности.

Задача 6.4. Докажите, что связный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей, и объясните, как найти число этих окружностей по V и E .

Задача 6.5. Докажите, что сфера с g ручками и n выколотыми точками гомотопически эквивалентна букету окружностей, и найдите число этих окружностей.

Задача 6.6. а) $\mathbb{R}P^n$ без точки гомотопически эквивалентно $\mathbb{R}P^{n-1}$;

б) $\mathbb{C}P^n$ без точки гомотопически эквивалентно $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Задача 6.7. Следующие пространства гомотопически эквивалентны:

1) $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ (окружность вложена стандартным образом);

2) сфера, вместе с отрезком, соединяющим полюса;

3) сфера с двумя склеенными точками;

4) $S^2 \vee S^1$.

Задача 6.8. Пусть X — дополнение к координатным осям а) в \mathbb{R}^3 б*) в \mathbb{C}^3 . Докажите, что X гомотопически эквивалентно букету сфер (какому именно?).

Задача 6.9. Пусть \mathbb{R}^∞ — множество финитных (обращающихся с какого-то момента в ноль) последовательностей вещественных чисел с евклидовой метрикой; S^∞ — сфера в этом пространстве (все точки на расстоянии 1 от нуля). Докажите, что S^∞ стягиваемо.