

Независимый Московский Университет, Алгебраические
кривые, весна 2017

5

Квартикой Клейна называется плоская кривая, заданная в однородных координатах уравнением

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

- 5.1. Докажите, что кватрика Клейна неприводима и гладка.
5.2. Найдите проективные преобразования плоскости \mathbf{P}_2 порядков 2, 3 и 7, оставляющие кватрику Клейна инвариантной. Какие группы порождаются преобразованиями порядков 2 и 3? Порядков 3 и 7?
5.3. Вычислите *гессиан* формы, задающей кватрику Клейна (удобно поделить его на -54). Сколько перегибов имеет кватрика Клейна?
5.4. Убедитесь, что прямая, заданная уравнением $x + y + z = 0$ в \mathbf{P}_2 , является *бикасательной* к кватрике Клейна. Найдите другие бикасательные.

5.5. Рассмотрите морфизм кватрики Клейна на прямую, заданную уравнением $\xi + \eta + \zeta = 0$ в "другой" проективной плоскости:

$$(x : y : z) \mapsto (x^3y : y^3z : z^3x).$$

Исследуйте ветвление этого морфизма.

5.6. Постройте бирациональный изоморфизм кватрики Клейна и кривой, заданной в аффинных координатах уравнением

$$s^7 = t^2(t + 1).$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

5.7. В обозначениях предыдущей задачи покажите, что дифференциал $\frac{dt}{s^3}$ соответствует *регулярному* дифференциалу на кватрике Клейна. Над \mathbb{C} убедитесь в том, что интегралы этого дифференциала по $-\infty < t < -1$, по $-1 < t < 0$ и по $0 < t < \infty$ соответствуют его *периодам* (то есть интегралам по замкнутым циклам) на кватрике Клейна, и выразите эти периоды через бета-функцию Эйлера.

5.8. Рассмотрите *кривую Ферма*, заданную уравнением $\xi^7 + \eta^7 + \zeta^7 = 0$ в однородных координатах, и проверьте, что формула

$$(\xi : \eta : \zeta) \mapsto (\xi^3\zeta : \eta^3\xi : \zeta^3\eta)$$

определяет морфизм этой кривой на кватрику Клейна. Пользуясь тем известным фактом, что на кватрике Клейна нет рациональных точек, кроме $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ и $(0:0:1)$, выведите из существования этого морфизма *последнюю теорему Ферма* для показателя 7.

13 апреля, Г.Б. Шабат