Лекция 12
Риманова геометрия

1) Связность Леви-Чивита (окончание)

2) Тензор Римана и его симметрии, запись в координатах, тождества
3) Тензор Риччи, скалярная кривизна

4) Секционная кривизна
5) римановы подмногообразия: индуцированные метрика и связности в касательном и нормальном расслоении, деривационные уравнения Гаусса-Вейнгартена
6) Уравнение Гаусса
7) Уравнение Петерсона-Кодацци

в следующий раз

Теорема (Леви-Чивита) На римановом многообразии существует и единственна симметрическая связность, согласованная с метрикой. При этом

$$(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\big(X(Y,Z) + Y(Z,X) - Z(X,Y) + (Z,[X,Y]) + (Y,[Z,X]) - (X,[Y,Z])\big) \quad (*) \iff$$

$$\iff \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}(e_i g_{jl} - e_l g_{ij} + e_j g_{li} - c_{ilj} + c_{ijl} - c_{jli}),$$

где $c_{ijl} = ([e_i, e_j], e_l)$, $(**)$

Замечание: если $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, то $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0 \Rightarrow c_{ijl} = 0$, также $e_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, поэтому

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^{j}}\right)$$

$\Rightarrow$ Уже доказали единственность

Теперь существование

Определим

$$F_{X,Y}(Z) = \frac{1}{2}\big(X(Y,Z) + Y(Z,X) - Z(X,Y) + (Z,[X,Y]) + (Y,[Z,X]) - (X,[Y,Z])\big)$$

Докажем линейность по Z

линейность над $\mathbb{R}$ следует из свойств $[,]$, $(,)$, X

Надо д-ть, что $F_{X,Y}(fZ) = fF_{X,Y}(Z)$

для $f \in C^\infty$

Делаем вычислением

$$F_{X,Y}(fZ) = \frac{1}{2}\big(\underline{X(Y,fZ)} + \underline{\underline{Y(fZ,X)}} - fZ(X,Y) + (fZ,[X,Y]) + \underline{(Y,[fZ,X])} - \underline{\underline{(X,[Y,fZ])}}\big) =$$

$$[X, fZ] = (Xf)Z + f[X,Z]$$

$$[fZ, X] = -[X, fZ] = -(Xf)Z + f[Z,X]$$

$$= f F_{X,Y}(Z) + \frac{1}{2}\Big(\cancel{(Xf)(Y,Z)} + \cancel{(Yf)(Z,X)} - \cancel{(Xf)(Y,Z)} - \cancel{(Yf)(X,Z)}\Big) =$$

$$= f F_{X,Y}(Z)$$

Т.к. при помощи $(,)$ $V \cong V^*$, то $\exists$ векторное поле $D(X,Y)$ т.что

$$F_{X,Y}(Z) = (D(X,Y), Z)$$

Докажем, что $D(X,Y)$ удовлетворяет аксиомам связности

1) $D(X_1+X_2, Y) = D(X_1,Y) + D(X_2,Y)$
2) $D(fX, Y) = f D(X,Y)$
3) $D(X, Y_1+Y_2) = D(X,Y_1) + D(X,Y_2)$
4) $D(X, fY) = (Xf)Y + f D(X,Y)$

Умножим эти тождества скалярно на Z

1') $F_{X_1+X_2,Y}(Z) = F_{X_1,Y}(Z) + F_{X_2,Y}(Z)$

2') $F_{fX,Y}(Z) = fF_{X,Y}(Z)$

3') $F_{X,Y_1+Y_2}(Z) = F_{X,Y_1}(Z) + F_{X,Y_2}(Z)$

4') $F_{X,fY}(Z) = (Xf)(Y,Z) + fF_{X,Y}(Z)$

Проверяется вычислением как и уже проверенная линейность по Z

То есть $\exists$ связность ∇ т.ч.

$$\nabla_X Y = D(X,Y).$$

Надо проверить её симметричность и согласованность с метрикой

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

$$\Updownarrow$$

$$([X,Y],Z) = F_{X,Y}(Z) - F_{Y,X}(Z)$$

$$X(Y,Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$$

$$\Updownarrow$$

$$X(Y,Z) = F_{X,Y}(Z) + F_{X,Z}(Y)$$

$\xi = (E \xrightarrow{p} M)$ ∇

$F = \nabla^2 \in \Omega^2(M, \operatorname{End}\xi)$

F - кривизна связности ∇

$\xi = (TM \xrightarrow{p} M)$

$F = \nabla^2 \in \Omega^2(M, \operatorname{End} TM) =$

$= \Gamma(M, \Lambda^2 T^*M \otimes \underbrace{T^*M \otimes TM}_{\operatorname{End} TM}) \subset$

$\subset \Gamma(M, T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$

$\Rightarrow F$ - Тензор типа $\binom{1}{3}$

Традиционное обозначение R

Тензор Римана

Тензор кривизны Римана

$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$

$R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$

Наше соглашение

$$R^l_{ij,k} = \left(R(e_i,e_j)e_k\right)^l =$$

$$= e^l\left(R(e_i,e_j)e_k\right)$$

$$R_{ij,kl} = R^l_{ij,k}\, g_{lm} =$$

$$= \left(R(e_i,e_j)e_k, e_l\right)$$

<u>Теорема</u> (О симметриях тензора Римана)

1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

$$R^l_{ij,k} = -R^l_{ji,k}$$

2) если ∇ согласована с метрикой, то

$$\left(R(X,Y)Z, W\right) = -\left(R(X,Y)W, Z\right)$$

$\Leftrightarrow$ в о/н базисе e_i

$$R^l_{ij,k} = -R^k_{ij,l}$$

3) Если ∇ симметрична, то

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$$

$$R^l_{ij,k} + R^l_{ki,j} + R^l_{jk,i} = 0$$

4) Если ∇ — связность Леви-Чивита, то

$$(R(X,Y)Z, W) = (R(Z,W)X, Y)$$

$$R_{ij,kl} = R_{kl,ij}$$

▷ 1) $R \in \Omega^2(\mathrm{End}\,TM)$

а 2-форма кососимметрична

2) в модели расслоения если ∇ согласована с метрикой, то в о/н базисе сечений $F^T = -F$

3) достаточно д-ть для базисных векторов

Выберем базис $\frac{\partial}{\partial x^i}$

$X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$

$\Rightarrow$ их коммутатор 0

$$\Rightarrow R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \cancel{\nabla_{[X,Y]} Z}$$

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X =$$

$$= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y +$$

$$+ \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X =$$

$$= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) +$$

$$+ \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) =$$

$$= \nabla_X \underbrace{[Y,Z]}_{=0} + \nabla_Y \underbrace{[Z,X]}_{=0} + \nabla_Z \underbrace{[X,Y]}_{=0} =$$

$$= 0$$

4) $(R(X,Y)Z,W) + (R(Y,Z)X,W) +$
$+ (R(Z,X)Y,W) = 0$ (A)

$$\underline{(R(X,Y)W,Z)} + \cancel{(R(Y,W)X,Z)} + \cancel{(R(W,X)Y,Z)} = 0 \quad (B)$$

$$\underline{(R(Z,W)X,Y)} + \cancel{(R(W,X)Z,Y)} + \cancel{(R(X,Z)W,Y)} = 0 \quad (C)$$

$$\underline{(R(Z,W)Y,X)} + \cancel{(R(W,Y)Z,X)} + \cancel{(R(Y,Z)W,X)} = 0 \quad (D)$$

$$A - B - C + D$$

$$2(R(X,Y)W,Z) - 2(R(Z,W)X,Y) = 0$$

$$(R(X,Y)W,Z) = (R(Z,W)X,Y)$$

<u>Замечание</u> Из 4) следует, что

$$(R(\cdot,\cdot)\cdot,\cdot) \in \Gamma(M, S^2(\Lambda^2 T^*M))$$

Есть разные дифференциальные тождества, например тождество Бьянки

$$(\nabla_X R)(Y,Z,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,V) = 0$$

Тензор Риччи

$R^{l}_{ij,k}$ свернем пару индексов!

$R^{k}_{ij,k} = 0$ для ∇ Леви-Чивита,

т.к. $R^{l}_{ij,k} = -R^{k}_{ij,l}$

Тензор Риччи $R_{jk} = R^{l}_{lj,k}$

$$Ric_{jk} = R^{l}_{lj,k}$$

$$Ric(X,Y) = tr\,[Z \mapsto R(Z,X)Y]$$

<u>Упр</u> для связности Леви-Чивита

$$R(X,Y) = R(Y,X),$$

то есть это квадратичная форма

Скалярная кривизна

$$R = \underset{ij}{tr}\,Ric$$

$$R = g R_{ij}$$

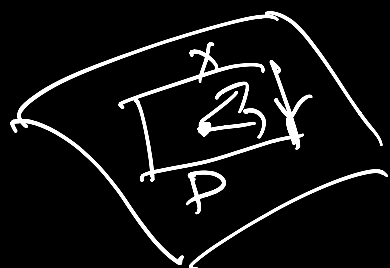
<u>Упр</u> $M^2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

1) $Ric(X,Y) = K(X,Y)$

2) $R = 2K$

Секционная кривизна

$M \quad \dim M \geq 2$



M

$$\frac{(R(X,Y)Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - (X,Y)^2}$$

Для связности Леви-Чивита

<u>Утв</u> Это выражение не меняется при невырожденном линейном преобразовании

$$X \mapsto X' = \alpha X + \beta Y \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$
$$Y \mapsto Y' = \gamma X + \delta Y$$

▷ Заметим, что это выражение сохраняет при преобразованиях 1), 2), 3), порождающих $GL(2)$

1) $X \mapsto X' = Y$

$Y \mapsto Y' = X$

2) $X \mapsto X' = \alpha X$

$Y \mapsto Y' = Y$

3) $X \mapsto X' = X + Y$

$Y \mapsto Y' = Y$

Поэтому эта величина определяется двумерной плоскостью

$$\sigma = \mathrm{Span}(X, Y) \subset T_pM$$

$$K_\sigma = \frac{(R(X,Y)Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - (X,Y)^2}$$

Секционная кривизна в точке p в направлении плоскости σ

Упр Для поверхностей

$$K_\sigma = K$$

Подмногообразие

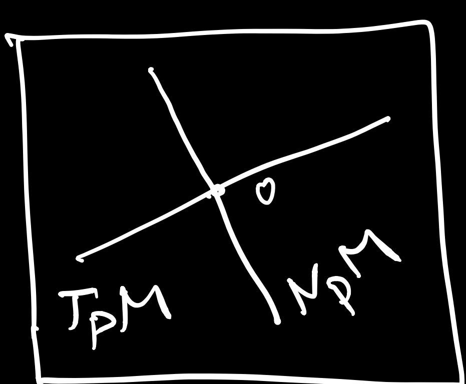
$\tilde M$ риманово мн-е с метрикой $\widetilde{(\,,\,)}$ и связностью Леви-Чивита $\tilde\nabla$

$M \subset \tilde M$ подмногообразие (погруженное)

$(\,,\,) = \widetilde{(\,,\,)}|_M$ индуцированная метрика $\Rightarrow$

$\Rightarrow M, (\,,\,)$ риманово подмногообразие

$p \in M \subset \tilde M$



$T_p\tilde M$

$\forall p \in M \subset \tilde M$

$T_pM \subset T_p\tilde M$

$N_pM = (T_pM)^\perp$ нормальное пр-во

$$\begin{tikzcd} T\tilde{M} \arrow[d] & \supset & TM \arrow[d] \\ \tilde{M} & \supset & M \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} T\tilde{M} \arrow[d] & \supset & NM \arrow[d] \\ \tilde{M} & \supset & M \end{tikzcd}$$

касательное расслоение к M нормальное расслоение к M

$P \in \Gamma(M, \mathrm{End}\,\tilde{M}|_M)$

$\forall A \in M$
$P_A : T_A\tilde{M} \to T_A\tilde{M}$ ортогональный проектор на $T_AM \subset T_A\tilde{M}$

X, Y – касательные векторные поля на M

ξ – касательное векторное поле на $\tilde{M}$, нормальное к M

$$\tilde\nabla_X Y = \underbrace{P(\tilde\nabla_X Y)}_{\nabla_X Y} + \underbrace{(Id-P)(\tilde\nabla_X Y)}_{B(X,Y)}$$

$$\tilde\nabla_X \xi = \underbrace{P(\tilde\nabla_X \xi)}_{-W_\xi(X)} + \underbrace{(Id-P)(\tilde\nabla_X \xi)}_{\nabla^{NM}_X \xi}$$

<u>Утв</u> 1) $\nabla_X Y = P(\tilde\nabla_X Y)$ – связность Леви-Чивита для M

2) $B : T_A M \times T_A M \to N_A M$ – симметричная билинейная (векторнозначная) форма

<u>Опр</u> B – вторая квадратичная форма M в $\tilde M$

<u>Утв</u> 3) $W : N_A M \times T_A M \to T_A M$ линейно по всем аргументам

4) $(W_\xi(X), Y) = (B(X,Y), \xi)$

Опр $W_\xi : T_A M \to T_A M$ оператор Вейнгартена

Утв 5) $\nabla^{NM}_X \xi = (Id - P)(\tilde{\nabla}_X \xi)$ — согласованная с $(,)|_{NM}$ связность в расслоении NM

Т.е.

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)$$

деривационное уравнение Гаусса

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -W_\xi(X) + \nabla^{NM}_X Y$$

деривационное уравнение Вейнгартена