Лекция 13

Риманова геометрия

1) Уравнение Гаусса
2) Уравнение Петерсона-Кодацци
3) Метрика Картана-Киллинга на группах Ли
4) Киллинговы векторные поля и группа изометрий
5) геодезические
6) экспоненциальное отображение

в след. раз.

$\tilde{M}$ риманово

$M \subset \tilde{M}$

M подмногообразие (погруженное)

$(,)^M = (,)^{\tilde{M}}|_{TM}$

$(,)^{NM} = (,)^{\tilde{M}}|_{NM}$

$\tilde{M}$ $(,)^{\tilde{M}}$ $\tilde{\nabla}$ св-ть Леви-Чивита

M $(,)^M$ ∇ связность Леви-Чивита

X, Y — касательные к M

ξ — нормальное к M

$$\tilde\nabla_X Y = \underbrace{\overbrace{P(\tilde\nabla_X Y)}^{\nabla_X Y}}_{\text{касательное к } M} + \underbrace{\overbrace{(Id-P)(\tilde\nabla_X Y)}^{B(X,Y)}}_{\text{нормальное к } M}$$

$$\tilde\nabla_X \xi = \underbrace{P(\tilde\nabla_X \xi)}_{=-W_\xi(X)} + \underbrace{(Id-P)(\tilde\nabla_X \xi)}_{=\nabla^{NM}_X \xi}$$

$$\tilde\nabla_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y) \quad (\Gamma)$$

$$\tilde\nabla_X \xi = -W_\xi(X) + \nabla^{NM}_X \xi \quad (B)$$

Деривационные уравнения Гаусса — Вейнгартена

$$\nabla_X Y = P(\tilde\nabla_X Y)$$

$\tilde M \quad (\,,\,)^{\tilde M} \quad \tilde\nabla \quad \tilde R$

$M \quad (\,,\,)^{M} \quad \nabla \quad R$

← Тензоры Римана

Идея: $P(\tilde{R}(X,Y)Z)$

X, Y, Z - касательные к M векторные поле

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

$$\tilde{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + B(Y,Z)$$

$$P(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z) = \underline{P(\tilde{\nabla}_X \nabla_Y Z)} + \underline{P(\tilde{\nabla}_X B(Y,Z))} = \underline{\nabla_X \nabla_Y Z} - \underline{W_{B(Y,Z)}(X)}$$

$$P(\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - W_{B(X,Z)}(Y)$$

$$P(\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z) = \nabla_{[X,Y]} Z$$

<u>Итб</u> $P(\tilde{R}(X,Y)Z) = R(X,Y)Z + W_{B(X,Z)}(Y) - W_{B(Y,Z)}(X)$

(уравнение Гаусса)

Тождество: $\langle B(X,Y), \xi\rangle^{NM} =$

$= \langle W_\xi(X), Y\rangle$

<u>Следствие</u> Если X, Y, Z, V – касательные векторные поля на M, то

$\langle \tilde{R}(X,Y)Z, V\rangle = \langle R(X,Y)Z, V\rangle +$

$+ \langle B(X,Z), B(Y,V)\rangle^{NM} -$

$- \langle B(Y,Z), B(X,V)\rangle^{NM}$

случай $\tilde{M} = \mathbb{R}^3$ $\tilde{R} = 0$

$\dim M = 2 \Rightarrow B(X,Y) = \mathrm{II}(X,Y)\vec{m}$

Тогда

$0 = \langle R(X,Y)Z, V\rangle + \mathrm{II}(X,Z)\mathrm{II}(Y,V) -$

$- \mathrm{II}(Y,Z)\mathrm{II}(X,V)$

<u>Следствие</u> На двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

$$\langle R(X,Y)Z,V\rangle = \mathrm{II}(Y,Z)\,\mathrm{II}(X,V) - \mathrm{II}(X,Z)\,\mathrm{II}(Y,V)$$

уравнение Петерсона-Кодацци

$$(Id-P)(\tilde{R}(X,Y)Z) = (\hat{\nabla}_X B)(Y,Z) - (\hat{\nabla}_Y B)(X,Z)$$

$$B : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \to \Gamma(NM)$$

$$B \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM\otimes TM, NM))$$

$\tilde{\nabla}$ на $T\tilde{M}$ $\supset TM$, $\supset NM$ $\Leftarrow$ индуцированные связности $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{\nabla}$ - индуцированная связность на $\mathrm{Hom}(TM\otimes TM, NM)$

Упр $(\hat{\nabla}_X B)(Y,Z) =$

$$= \nabla_X^{NM}(B(Y,Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z)$$

Упр д-ть уравнение Петерсона-Кодацци

как в д-ве уравнение Гаусса и воспользоваться

$$[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X$$

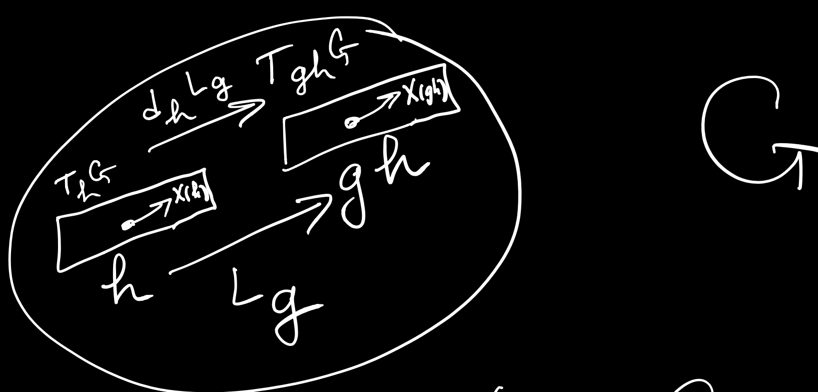
Метрика Картана–Киллинга

G группа Ли

$L_g : G \to G$

$L_g(h) = gh$

<u>Опр</u> Метрика на группе Ли называется левоинвариантной, если L_g — изометрия

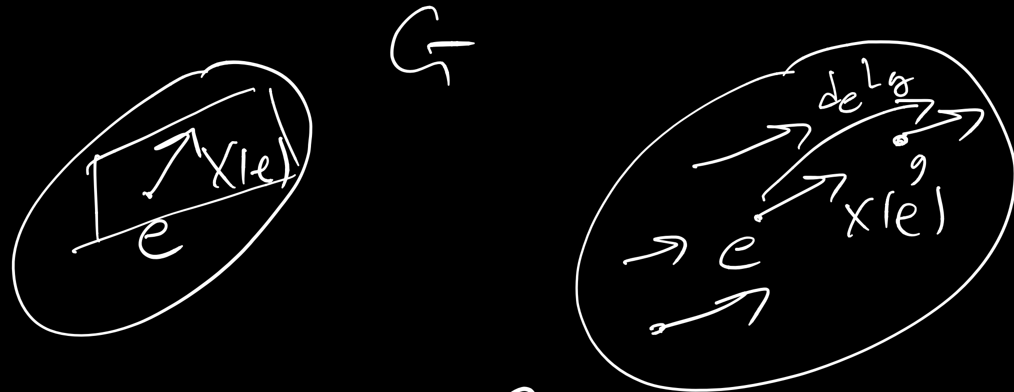


<u>Опр</u> Векторное поле X на G левоинвариантно, если $\forall\, h, g$

$$d_h L_g X(h) = X(gh)$$

Следствие. Если $h = e$, то

$X(g) = d_e L_g X(e)$, то есть левоинвариантное поле полностью определяется $X(e) \in T_eG = \mathfrak{g}$



Если $\xi \in \mathfrak{g}$, то $\tilde{\xi}$ — соответствующее левоинвариантное векторное поле, т.е.

$$\tilde{\xi}(g) = d_e L_g \xi$$

$e_1, \dots, e_n$ — базис в $T_eG = \mathfrak{g}$, то

$\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ — базис (глобальный!) в векторных полях, состоящий из левоинвариантных векторных полей.

<u>Следствие</u> TG тривиально

<u>Следствие</u> Левоинвариантная метрика $\langle , \rangle$ полностью определена в e, т.к

$$\langle \tilde{e}_i(g), \tilde{e}_j(g) \rangle_g \overset{\text{левоинв}}{=\!=\!=} \langle e_i, e_j \rangle_e$$

По другому: $G \xrightarrow{L_g} G$ изометрия

$$\langle , \rangle = (L_g)^* \langle , \rangle$$

$$g \xrightarrow{L_{g^{-1}}} e \qquad \langle , \rangle_g = (L_{g^{-1}})^* \langle , \rangle_e$$

$R_g : G \to G \qquad R_g(h) = hg^{-1}$

правый сдвиг

<u>Опр</u> Метрика называется биинвариантной (или метрикой Картана-Киллинга), если $\forall g$ L_g и R_g — изометрии.

$\langle , \rangle$ левоинвариантна $\Rightarrow$ полностью определена $\langle , \rangle_e$

правоинвариантность — некоторое дополнительное условие на $\langle , \rangle_e$

$$I_g(h) = ghg^{-1} \qquad I_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$$

— изоморфизм

$$I_g(e) = e$$

$$d_e I_g : T_e G \to T_e G$$ ортогональный оператор

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

$$\| $$

$Ad(g)$ присоединённое представление группы

$$Ad : G \to GL(T_e G) = GL(\mathfrak{g})$$

$$Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$$

$$ad = d_e Ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

присоединенное представление $\mathfrak{g}$

$Ad(g)$ ортогональный $\Rightarrow$ ad_ξ — кососимметрический, то есть $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g}$

$$\langle ad_\xi \eta, \zeta \rangle_e + \langle \eta, ad_\xi \zeta \rangle_e = 0$$

$$ad_\xi \eta = [\xi, \eta]$$

Утв если метрика $\langle , \rangle$ биинвариантна, то $\langle [\xi, \eta], \zeta \rangle_e + \langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle_e = 0$

Упр* Обратное тоже верно

Замечание 1) У алгебраистов это называется просто инвариантная метрика

2) **Пример** $O(n)$, $SO(n)$

$$\langle \xi, \eta \rangle_e = \operatorname{tr} \xi \eta^T$$

— биинвариантная метрика

3) не на каждой группе такая метрика есть

$GA(1)$ — группа аффинных преобразований прямой

$$x \mapsto ax + b$$

Упр. свойство биинвариантности на $GA(1)$ $\Rightarrow$ вырожденность $\langle , \rangle_e$.

Теорема Пусть G - группа Ли с биинвариантной метрикой $\langle , \rangle$. Пусть ∇ - соответствующая связность Леви-Чивита. Пусть X, Y, Z, V — левоинвариантные векторные поля. Тогда

1) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$

2) $R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]$

2') $\langle R(X,Y)Z, V\rangle = -\frac{1}{4}\langle [X,Y],[Z,V]\rangle$

$$\Updownarrow$$

1a) $\nabla_{\tilde\xi}\tilde\eta = \frac{1}{2}\widetilde{[\xi,\eta]}$

2a) $R(\tilde\xi,\tilde\eta)\tilde\zeta = -\frac{1}{4}\widetilde{[[\xi,\eta],\zeta]}$

2'a) $\langle R(\tilde\xi,\tilde\eta)\tilde\zeta, \tilde\gamma\rangle = -\frac{1}{4}\langle [\xi,\eta],[\zeta,\gamma]\rangle_e$

▶ X, Y, Z левоинв

$$\langle X,Y\rangle_g = \langle X,Y\rangle_e \Rightarrow \text{это константа}$$

$$\Rightarrow Z\langle X,Y\rangle = 0$$

биинвариантность $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle [X,Y],Z\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle = 0$$

$$\langle \nabla_X X, Z\rangle \overset{\text{Th Леви-Чивита}}{=} 0 \quad (\text{проверьте!})$$

$\Rightarrow \forall$ левоинв X имеем $\nabla_X X = 0$

X, Y левоинв $\Rightarrow X+Y$ левоинв

$$0 = \nabla_{X+Y}(X+Y) = \nabla_X Y + \nabla_Y X \qquad (1)$$

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \qquad (2)$$

$$\frac{(1)+(2)}{2} \qquad \nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$$

$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ = явное вычисл..

Геодезические

$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$

Пусть $(M, \langle , \rangle)$ — риманово мн-е, а ∇ — связность Леви-Чивита.

Опр кривая $\gamma : (a, b) \to M$ геодезическая, если $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$.

Утв $\dot\gamma$ параллельно вдоль γ

Утв параметр t на геодезической — аффинный натуральный параметр

$\langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle = c \Rightarrow |\dot\gamma| = \sqrt{c}$ const

Утв В локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ уравнение геодезических $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ имеет вид

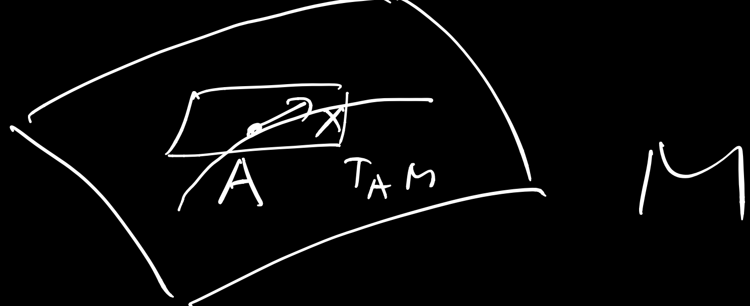
$$\ddot{x}^i(t) + \Gamma^i_{jk}(x^1(t), \dots, x^n(t))\dot{x}^j(t)\dot{x}^k(t) = 0,$$

$i = 1, \dots, n = \dim M$

система из нелинейных ОДУ 2-го порядка

Задача Коши:

$$\begin{cases} \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, & i = 1, \dots, n \\ x^i(t_0) = A^i, & i = 1, \dots, n \\ \dot{x}^i(t_0) = X^i, & i = 1, \dots, n \end{cases}$$



Теорема (существование и единственность для геодезических). Пусть M — риманово мн-е, $A \in M$, $\underline{X} \in T_A M$, $t_0 \in \mathbb{R}$.
Тогда существует геодезическая
$\gamma : (a, b) \to M$, т.ч. $\gamma(t_0) = A$,
$$\underset{\ni t_0}{(a,b)}$$
$\dot\gamma(t_0) = \underline{X}$, и если она непродолжаема, то она единственна.