Дифференциальная геометрия. Лекция 10

1) кривизна связности
2) связности, согласованные с метрикой
3) операции с векторными расслоениями и связности
4) связности и кривизна в $O(n)$, $SO(n)$ и $U(n)$-расслоениях
5) построение связностей с помощью проекторов
6) связность и параллельный перенос, симв. Γ
7) ковариантные производные тензоров
8) ∇_X и L_X

не успели

$$\Omega^0(M,\xi) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M,\xi) \xrightarrow{\nabla} \Omega^2(M,\xi) ?$$

$$\Omega^0(M,\xi) = \Gamma(M,\xi)$$

$$\Omega^k(U,\xi) \xrightarrow{\nabla^2} \Omega^{k+2}(U,\xi)$$

$\nabla = d + \omega$ локально

$$\nabla(\alpha\otimes s) = d\alpha\otimes s + (-1)^{\deg\alpha}\underline{\alpha\wedge\nabla s}$$

$\beta\in\Omega^{l}(U)$ $\tau=\gamma\otimes s\in\Omega^{k}(U,\xi)$

$\beta\wedge\tau = \beta\wedge\gamma\otimes s$

$\nabla^2 = (d+\omega)^2$

$V\ni v$ $A: V\to V$ лин. оператор

$A\in \mathrm{End}\,V$

Av

$\xi=(E,p,M)$ векторное расслоение

$s\in\Gamma(U,E)$ $A\in\Gamma(U,\mathrm{End}\,E)$

$x\in U$ $A_x\in \mathrm{End}_x$ $A_x: E_x\to E_x$

$As\in\Gamma(U,E)$ $(As)(x)=A_x s(x)$

$\tau\in\Omega^{k}(U,\xi)$ $A\in\Omega^{l}(U,\mathrm{End}\,\xi)$

$A\wedge\tau$?

$$\tau = \underset{\Omega^k(U)}{\alpha} \otimes \underset{\Gamma(U,\xi)}{s} \qquad A = \underset{\Omega^\ell(U)}{\beta} \otimes \underset{\Gamma(U,\operatorname{End}\xi)}{B}$$

$$A \wedge \tau = (\beta \otimes B) \wedge (\alpha \otimes s) =$$

$$= \underset{\Omega^{k+\ell}(U)}{\beta \wedge \alpha} \otimes \underset{\Gamma(U,\xi)}{Bs} \in \Omega^{k+\ell}(U,\xi)$$

Пусть U – трив. окр-ть

Утв Существует такая форма $F \in \Omega^2(U, \operatorname{End}\xi)$, что

$$\nabla^2 s = F \wedge s$$

▶ в U локально $\nabla = d + \underset{\Omega^1(U,\operatorname{End}\xi)}{\omega}$,

$$s \in \Omega^k(U,\xi)$$

$$\nabla^2 s = (d+\omega)(d+\omega)s =$$

$$= (d+\omega)(ds + \omega \wedge s) =$$

$$= \cancel{d^2 s} + d(\omega \wedge s) + \omega \wedge ds + \omega \wedge \omega \wedge s =$$

$$= d\omega \wedge s - \cancel{\omega \wedge ds} + \cancel{\omega \wedge ds} + \omega \wedge \omega \wedge s =$$

$$= \underbrace{(d\omega + \omega\wedge\omega)}_{F \,\in\, \Omega^2(M,\, \mathrm{End}\, E)} \wedge s$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega^i_j \end{pmatrix} \quad \mathrm{rk}\, E \times \mathrm{rk}\, E$$

$$s = \begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^p \end{pmatrix} \quad p = \mathrm{rk}\, E$$

$$F = \begin{pmatrix} F^i_j \end{pmatrix} \quad p \times p$$

$$F = d\omega + \omega\wedge\omega$$

$$\begin{pmatrix} F^i_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\omega^i_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^i_q \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^q_j \end{pmatrix}$$

$$F^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_q \wedge \omega^q_j$$

$\omega = \Gamma$ on TM

$$F = d\Gamma + \Gamma\wedge\Gamma$$

F — кривизна ∇

Преобразование при замене базиса в слоях

$$\tilde{\omega} = T^{-1}\cdot\omega\cdot T + T^{-1}\cdot dT$$

<u>Упр</u> $\tilde{F} = T^{-1}\cdot F\cdot T$

<u>Следствие</u> $\exists$ глобально определенная форма $F \in \Omega^2(M, \mathrm{End}\,\xi)$

<u>Опр</u> F — форма кривизны (кривизна) связности ∇

X, Y — векторные поля на U

$$F(X,Y) \in \Gamma(U, \mathrm{End}\,\xi)$$

$$s \in \Gamma(U, \xi)$$

$$F(X,Y)s$$

<u>Упр</u> $F(X,Y)s = \nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s$

$$F(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$$

Связности, согласованные с метрикой

$\xi = (E, p, B)$ евклидово (эрмитово) векторное расслоение

∇ $\quad$ $(,)$

<u>Опр</u> Связность ∇ согласована с метрикой $(,)$, если $\forall s,t \in \Gamma(M,\xi)$ верно

$$d(s,t) = (\nabla s, t) + (s, \nabla t)$$ равенство 1-форм

$$\Updownarrow$$

$\forall$ вект. поле X

$$X(s,t) = (\nabla_X s, t) + (s, \nabla_X t)$$

$\tau \in \Omega^1(M,\xi)$ $\qquad$ $t \in \Gamma(M,\xi)$

(τ, t) - ? $\qquad$ $(\tau, t) = (\alpha \otimes s, t) =$

$$\tau = \underset{\Omega^1(M)}{\underset{\uparrow}{\alpha}} \otimes \underset{\Gamma(M,\xi)}{\underset{\uparrow}{s}}$$

$$= \alpha (s,t) \in \Omega^1(M)$$

Операции с векторными расслоениями и связностями.

$$E^1 \rightarrow B \leftarrow E^2 \qquad E^1 \oplus E^2 \rightarrow B \qquad E^1 \otimes E^2 \rightarrow B \qquad (E^1)^* \rightarrow B$$

$$\xi \oplus \eta, \ \xi \otimes \eta, \ \xi^*, \ \xi \wedge \xi, \ S^2 \xi, \dots$$

Продолжение связностей

$$\xi^1 = (E^1, p_1, B) \qquad \nabla^1$$

$$\xi^2 = (E^2, p_2, B) \qquad \nabla^2$$

$$\xi^1 \oplus \xi^2 = (E^1 \oplus E^2, p, B)$$

$$\nabla^1 \oplus \nabla^2 (\underset{\Gamma(\xi^1)}{\underset{\uparrow}{s}}, \underset{\Gamma(\xi^2)}{\underset{\uparrow}{t}}) = (\nabla^1 s, \nabla^2 t)$$

$$\omega = \left(\begin{array}{c|c} \omega^1 & 0 \\ \hline 0 & \omega^2 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} \nabla^1 = d + \omega^1 \\ \nabla^2 = d + \omega^2 \end{array}$$

$$\xi^1\otimes\xi^2 = (E^1\otimes E^2, p, B)$$

$$\nabla^1\otimes\nabla^2(\underset{\Gamma(\xi^1)}{s}\otimes\underset{\Gamma(\xi^2)}{t}) = \nabla^1 s\otimes t + s\otimes\nabla^2 t$$

$$\omega = \omega^1\otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id}\otimes\omega^2$$

$\xi = (E, p, B)$ $\quad\nabla$

$\xi^* = (E^*, p, B)$ $\quad\nabla^*$

$\langle\ ,\ \rangle$ спаривание векторов и ковекторов

$s\in\Gamma(M,\xi)$ $\quad t\in\Gamma(M,\xi)$

$\langle s,t\rangle\in C^\infty(M)$

<u>Опр</u> ∇^* определяется тождеством

$$d\langle s,t\rangle = \langle\nabla s,t\rangle + \langle s,\nabla^* t\rangle$$

Связности в $O(n)$, $SO(n)$ и $U(n)$ — расслоениях

$\xi = (E, p, B)$ $\quad \nabla$ согласована с $(\, , \,)$

U трив-ну-л $\quad k = \operatorname{rk} \xi$

$e_1, \dots, e_k$ о/н базис в $\Gamma(U, \xi)$

$\nabla = d + \omega$

$\nabla e_j = \omega_j^l e_l \qquad \omega = \left(\omega_j^l \right)$

$(e_j, e_i) = \delta_{ji}$

$$d(e_j, e_i) = 0$$
$$\parallel$$
$$(\nabla e_j, e_i) + (e_j, \nabla e_i)$$
$$\parallel$$
$$(\omega_j^l e_l, e_i) + (e_j, \omega_i^p e_p) = \omega_j^i + \omega_i^j$$

$\omega_j^i + \omega_i^j = 0 \qquad \omega + \omega^T = 0$

<u>Утв</u> В евклидовом (эрмитовом) векторном расслоении в о/н (унитарном) базисе верно

$$\omega^T = -\omega \qquad \left(\overline{\omega}^T = -\omega\right)$$

<u>Ут.</u> В тех же условиях

$$F^T = -F \qquad \left(\overline{F}^T = -F\right)$$

▷ $F^T = (d\omega + \omega\wedge\omega)^T =$

$= (d\omega)^T + (\omega\wedge\omega)^T =$

$(AB)^T = B^T A^T$, но для матриц из 1-форм $(A\wedge B)^T = -B^T\wedge A^T$

$= d\omega^T - \omega^T\wedge\omega^T = d(-\omega) - (-\omega)\wedge(-\omega) =$

$= -(d\omega + \omega\wedge\omega) = -F$ ◁

$$G = O(n), SO(n), U(n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \omega \in \Omega^1(U, \mathfrak{g}(n))$$

$$F \in \Omega^2(M, \mathfrak{g}(n))$$

Построение связностей с помощью проекторов

$\xi = (E, p, B)$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook] \arrow[dr] & B \times \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$

$(\mathbb{C}^n)$

подрасслоение тривиального

$\mathbb{R}^n$ $(,)$ стандартное

$(,)|_E$ — скалярное произведение на ξ

$\forall x \in B$ $P_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ортогональный (унитарный) проектор на E_x

P поле проекторов $P \in \Gamma(\mathrm{End}\, B \times \mathbb{R}^n)$

Утв. $\nabla s = P(ds)$ является связностью на E, согласованной с индуцированной метрикой

▷ 1) Линейность – очевидно, т.к. d и P линейны над $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

2) Тождество Лейбница

$$\nabla(fs) = P(d(fs)) =$$
$$= P(df \otimes s + f\,ds) =$$
$$= P(df \otimes s) + P(f\,ds) =$$
$$= df \otimes P(s) + f\,P(ds) =$$
$$= df \otimes s + f\,\nabla s$$

3) согласованность

$s, t \in \Gamma(\mathcal{U}, \xi)$

$$d(s,t)_E = d(s,t) =$$
$$= (ds, t) + (s, dt) =$$
$$= (P(ds), t) + (s, P(dt)) =$$
$$= (\nabla s, t) + (s, \nabla t)$$ ◁

$$\nabla s = P(ds)$$

<u>Пример</u> Универсальный

(тавтологическое) расслоение

над $\mathbb{CP}^1$

$\gamma^1 = (E, p, \mathbb{CP}^1)$

$E \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$

$E = \{(\ell, v) \mid v \in \ell\}$

$[z^0 : z^1]$ однородные к-ты точки $\mathbb{CP}^1$

$U_0 = \{[z^0 : z^1] \mid z^0 \neq 0\}$

$w = \frac{z^1}{z^0}$ неоднородные к-ты в U_0

$\ell = [z^0 : z^1] \Leftrightarrow (z^0, z^1)$ направляющий вектор ℓ

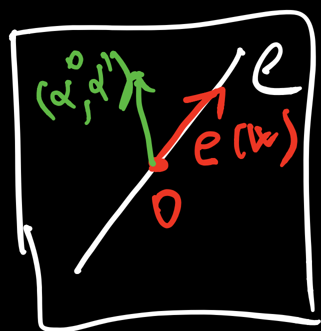
$(1, \frac{z^1}{z^0}) \parallel (z^0, z^1)$

″ $(1, w)$ это же базис в слоях!

$\mathrm{rk}\,\gamma^1 = 1$

e базисное сечение из $\Gamma(U_0, \gamma^1)$

$e(w) = (1, w)$



$\mathbb{C}^2$

$(\alpha^0,\alpha^1)=\alpha$

$$P_w(\alpha^0,\alpha^1)=\frac{(\alpha,e)}{(e,e)}e$$

Соглашение: $(v,w)=v^0\bar{w}^0+v^1\bar{w}^1$

$$=\frac{\alpha^0+\alpha^1\bar{w}}{1+|w|^2}e$$

$\nabla s = P(ds)$ $\qquad$ $\nabla e=\omega e$

$\Omega^1(M,\mathrm{End}\,\gamma^1)$

$\Omega^1(M)$

т.к. $\mathrm{rk}\,\gamma^1=1$

$$\nabla e = P(de)=P(d(1,w))=$$
$$=P((0,dw))=$$
$$=\frac{\bar{w}\,dw}{1+|w|^2}e$$

$$\omega = \frac{\bar w \, dw}{1+|w|^2}$$

$$F = d\omega + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\omega\wedge\omega} = d\left(\frac{\bar w\, dw}{1+|w|^2}\right) =$$

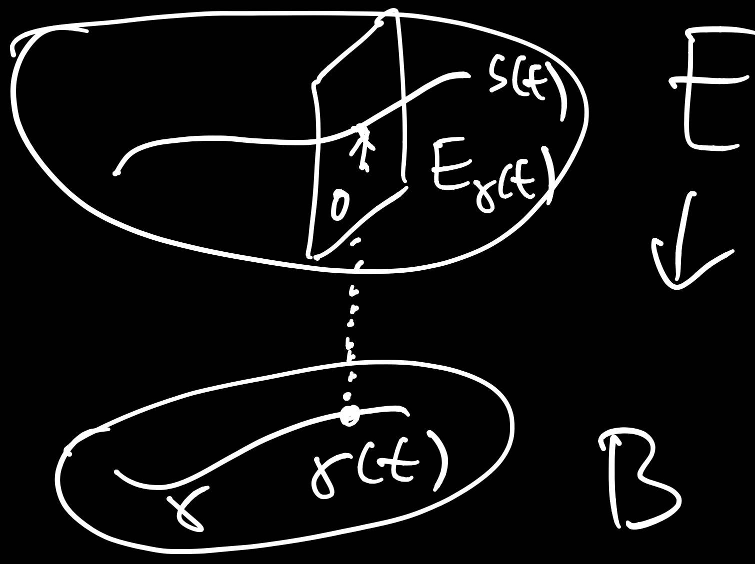
$$= \frac{\partial}{\partial \bar w}\left(\frac{\bar w}{1+w\bar w}\right) d\bar w \wedge dw =$$

$$= \frac{1+\cancel{w\bar w} - \cancel{\bar w w}}{(1+|w|^2)^2}\, d\bar w \wedge dw =$$

$$= -\frac{dw\wedge d\bar w}{(1+|w|^2)^2}$$

Связность и параллельный перенос

$$\nabla_{\dot\gamma} s = 0, \quad s\in\Gamma(E) \qquad \begin{array}{c} E \\ \downarrow p \\ B \end{array}$$



$s(t) \in E_{\gamma(t)}$

<u>Опр</u> Сечение s параллельно вдоль кривой $\gamma(t)$, если

$\forall t \quad \nabla_{\dot\gamma} s = 0$

$e_1, \dots, e_k$ базис $\Gamma(\mathcal{U}, E)$

$s = s^\alpha e_\alpha$

$$\dot s^\alpha + \omega^\alpha_\beta(\dot\gamma) s^\beta = 0$$

если в $\mathcal{U}$ лок к-ты $x^1, \dots, x^n$

$\omega^\alpha_\beta = \omega_{i,\beta}^\alpha dx^i$

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

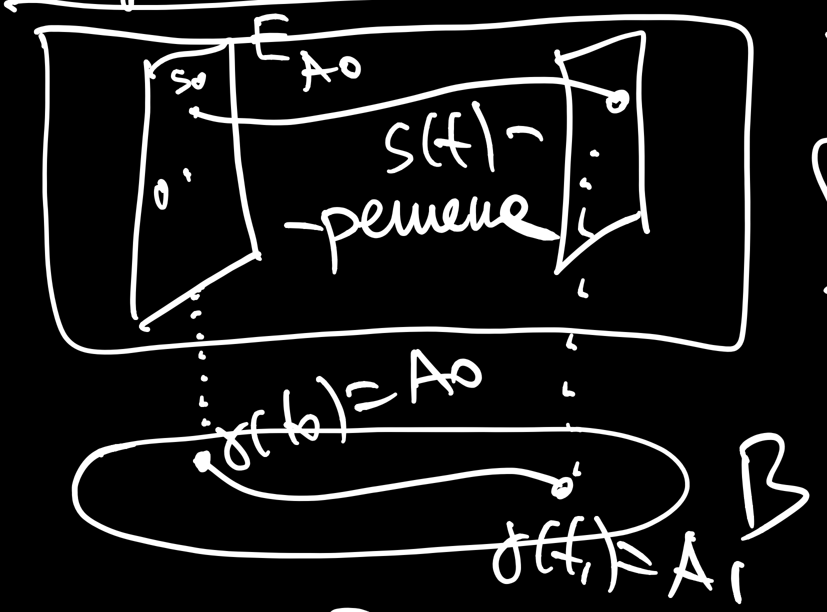
$$\dot\gamma(t) = (\dot x^1(t), \dots, \dot x^n(t))$$

$$\omega^\alpha_\beta(\dot\gamma) = \omega^\alpha_{i,\beta}\, \dot x^i(t)$$

$$S^\alpha + \omega^\alpha_{i,\beta}(x^1(t), \dots, x^n(t))\, \dot x^i(t)\, S^\beta = 0$$

$$S^\alpha + \omega^\alpha_{i,\beta}\, \dot x^i S^\beta = 0$$

<u>Параллельный перенос</u>



$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma} S = 0 \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$$

Задача Коши

$$\underbrace{s(t_1)}_{\text{результат}} \in E_{A_1} \quad // \text{ переноса}$$

вектора $s_0 \in E_{A_0}$ из A_0 в A_1 вдоль кривой γ.

$$s(t_1) = \Pi^{\gamma}_{A_0 \mapsto A_1} s_0$$

Свойства аналогичны || переносу на поверхностях:

1) $\Pi^{\gamma}_{A_0 \mapsto A_1} : E_{A_0} \to E_{A_1}$

линейный оператор

2) если ∇ согласована с метрикой, то || перенос сохраняет скалярное произведение

▶ $\frac{d}{dt}\left(s_1(t), s_2(t)\right) = \dot{\gamma}\left(s_1, s_2\right) =$

$= \left(\underbrace{\nabla_{\dot\gamma} s_1}_{=0}, s_2\right) + \left(s_1, \underbrace{\nabla_{\dot\gamma} s_2}_{=0}\right) = 0$ ◀