① Напоминание

- k — поле, $\mathrm{char}(k)=0$
- $Sm(k) = \{$гладк. мн-ия $/ k\}$

1 шаг

- $SmCor(k) = \Big($ объекты как в $Sm(k)$

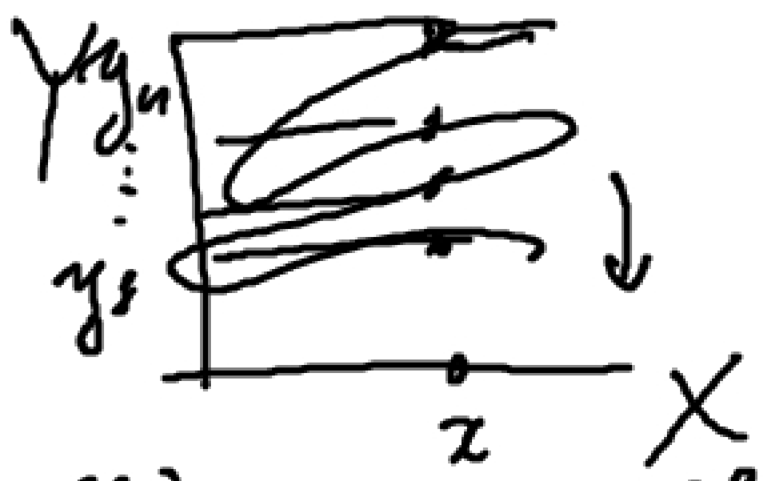
  м-мы $Cor(X,Y)$

где $Cor(X,Y) = \{$ $\mathbb{Q}$-лин. комб. таких $V \subset X\times Y$, з-тое, что V непр, $pr_X : V \to X$ конечн. сюръект. $\}$

если X — непр-в ($\Leftrightarrow$ связно)

$$Cor\Big(\coprod_i X_i, Y\Big) = \bigoplus_i Cor(X_i, Y)$$

Замеч.



$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i; \ \lambda_i \in \mathbb{Q}.$$

Замеч. $Sm(k) \longrightarrow SmCor(k)$ (ковар.) функтор

- $SmCor(k)$ адд. к-ия

Пример $C \xrightarrow{f} D$

конечн. м-м кр.

$$\Gamma_f \subset C\times D \ni x \longmapsto f(x)$$

$\Gamma_f^T \subset D\times C$ соотв м-м $D \to C$ в $SmCor(k)$

$$\Downarrow$$

$$y \longmapsto \sum_{x_i \mapsto y} x_i$$

$$\Gamma_f^T \circ \Gamma_f : x \longmapsto \sum_{f(x_i)=f(x)} x_i$$

$$\Gamma_f \circ \Gamma_f^T : y \longmapsto \deg(f)\cdot y$$

$\Longrightarrow \ [C] \simeq [D] \oplus M$ в $SmCor(k)^{\natural}$

$U \subset X\times Y$, $V \subset Y\times Z$

$V\circ U = p_{XZ*}\left(p_{XY}^{-1}(U)\cap p_{YZ}^{-1}(V)\right)$,

где p_{XZ*} с учётом кр-тей:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ W \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r] & f(W) \end{tikzcd}$$

$f|_W : W \to f(W)$ конечно

$\Rightarrow f_*(W) := \deg(f|_W)\cdot f(W)$

---

2 ШАГ

Хотим, чтобы $X\times \mathbb{A}^1 \to X$ стало изом-мом. (MV ...)

$K^b(\mathrm{SmCor}(k)) =$

$= \Big\{$ огранич. комплексы в $\mathrm{SmCor}(k)$; м-мы — это м-мы комплексов/гомотопии $\Big\}$

Замеч. · $K^b(\mathcal{E})$ имеет смысл $\forall$ адд. к-ии $\mathcal{E}$.

· это триангл. к-ия

$$K^b(\mathrm{SmCor}(k)) \ni \begin{tikzcd} X^{-n} \arrow[r] & X^{-n+1} \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] \arrow[dl] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[dl] & X^{n} \arrow[dl] \\ Y^{-n} \arrow[r] & Y^{-n+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r] & Y^{n} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{T}$ триангл. к-ия — это адд. к-ия, где выбран автоморф-зм $[1] : \mathcal{T}\to\mathcal{T}$ и выделены некие треуг.:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \xrightarrow{f[1]} B[1] \to \ldots$$

$g\circ f = 0,\ hg = 0,\ f[1]h = 0$

т.ч. вып-ся опрд. св-ва на эти треугольники ...

$$\left(\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \arrow[ul, "{h[1]}"] \end{tikzcd}\right)$$

$[1]$ – обычный сдвиг

Пример $K^b(\mathcal{E})$, выдел. треуг-ки – конусы м-мов;

$$C^\bullet \xrightarrow{f} D^\bullet \to \mathrm{cone}(f)^\bullet \to C^\bullet[1]$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & A[1] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & A'[1] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$

$(\Rightarrow B \to C \to A[1] \to B[1])$ выд.

Замеч. Нет функтора

$(A \xrightarrow{f} B) \longmapsto (A \xrightarrow{f} B \to C \to A[1])$ выдел.

Гельфанд, Манин "Методы гомол. алгебры"

Weibel

---

3 ШАГ

↯

$DM(k)^{eff} = \Big($локализация $K^b(SmCor/k)$ по $\mathbb{A}^1 \times X \to X$; $U \cap V \to U \oplus V \to X\Big)$

$U \cup V = X$, $U, V \subset X$ откр.

$\mathcal{T}$ — триангл. к-ия

$\cup$

$\mathcal{C}$ полная триангл. подк-ия, з-тая отн-но пр. слаг.

$$\mathcal{T}/\mathcal{C} = \left(\begin{array}{c} \text{обращении в } \mathcal{T} \text{ всех} \\ \text{м-мов } A \xrightarrow{f} B \text{ т.ч. } \exists \text{ выд. тр.} \\ A \xrightarrow{f} B \to C \to A[1], \\ \text{где } C \in \mathcal{C} \end{array} \right)$$

Замеч. • f изом-м (в $K^b/\mathcal{C}$) $\Leftrightarrow$ Cone$(f) = 0$ (в K^b)

• $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, hook] & \mathcal{T} \arrow[r] & \mathcal{T}/\mathcal{C} \\ C \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[rr, mapsto] & & 0 \arrow[u, phantom, "\in"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Sm(k) \arrow[r] & SmCor(k) \arrow[r] & K^b(SmCor(k)) \arrow[r] & DM(k)^{eff} \\ X \arrow[rrr, mapsto] & & & M(X) \end{tikzcd}$$

мотив мн-ия X

Замеч. • $M(X \times \mathbb{A}^1) \xrightarrow{\sim} M(X)$

(т.к. $M(X \times \mathbb{A}^1) \to M(X) \to \underset{\overset{\|}{0}}{\left(M(X \times \mathbb{A}^1) \to M(X)\right)}$)

• $M(U \cap V) \to M(U) \oplus M(V) \to M(U \cup V) \to$
$\to M(U \cap V)[1]$ выд. тр-к.

Замеч. Везде л.с., это $\mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$.

Утв $DM(k)^{eff}$ симм. $\otimes$-к-ия

$$M(X)\otimes M(Y) = M(X\times Y)$$

(ф-ла Кюннета)

Пример. $\mathbb{1} = M(pt) = M(\mathrm{Spec}(k)) =: \mathbb{Q}(0)$

- $X \to pt \Rightarrow$ $\underset{\text{привед. мотив.}}{\tilde{M}(X)} = \big(\underset{0}{X} \to \underset{1}{pt}\big)^{[1]} \in DM(k)^{eff}$

Есть $\tilde{M}(X)\to M(X)\to \mathbb{Q}(0)\to \tilde{M}(X)[1]$
выд. тр-ник.

- $x\in X(k) \Rightarrow X \overset{x}{\leftrightarrows} pt \Rightarrow$
$M(X) \overset{x}{\leftrightarrows} \mathbb{Q}(0) \Rightarrow M(X) = \tilde{M}(X)\oplus\mathbb{Q}(0)$

Опр.
$\tilde{M}(\mathbb{P}^1)[-2] =: \mathbb{Q}(1)$

Замеч $M(X) =$ "универс. гомол. X"

$$M(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Q}(0)\oplus\mathbb{Q}(1)[2]$$

Замеч $[1] =$ "сдвиг комплексов влево"

$$C[1]^i = C[1+i]$$

Упр. $\tilde{M}(\mathbb{G}_m) = ?$

$$\mathbb{G}_m = \underset{\mathbb{P}^1\setminus\infty}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{A}^1}} \cap \underset{\mathbb{P}^1\setminus 0}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{A}^1}} \subset \mathbb{P}^1$$

$$M(\mathbb{G}_m) \to \underset{\mathbb{Q}(0)}{\underset{\cong}{M(\mathbb{A}^1)}} \oplus \underset{\mathbb{Q}(0)}{\underset{\cong}{M(\mathbb{A}^1)}} \to \overset{\mathbb{Q}(0)\oplus\mathbb{Q}(1)[2]}{\overset{\cong}{M(\mathbb{P}^1)}}$$

точка $1 \in \mathbb{G}_m(k)$ $\Rightarrow$ рассм. эту тр-ку на

$$\mathbb{Q}(0) \to \mathbb{Q}(0) \oplus \mathbb{Q}(0) \to \mathbb{Q}(0) \quad \text{отм. тр.}$$

$$\oplus$$

$$\tilde{M}(\mathbb{G}_m) \to 0 \to \mathbb{Q}(1)[2] \quad \text{отм. тр}$$

$\Downarrow$

$$\mathbb{Q}(1)[1] \to \tilde{M}(\mathbb{G}_m) \to 0 \quad \text{отм. тр.}$$

$\Downarrow$

$$\mathbb{Q}(1)[1] \simeq \tilde{M}(\mathbb{G}_m)$$

<u>Замеч.</u> Ср. с. $H^1(\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}(-1)_H$.

$\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(1)^{\otimes i}$. $\quad (\mathbb{P}^1 \to pt)$

$i \geq 0$

② Св-ва $DM(k)^{eff}$

Теор.

- $\otimes \mathbb{Q}(1) : DM(k)^{eff} \to DM(k)^{eff}$ полный строгий

С-ие] $DM(k) = \{(\underset{\substack{\uparrow \\ DM(k)^{eff}}}{A}, i \in \mathbb{Z})\}$,

$$\mathrm{Hom}((A,i),(B,j)) = \mathrm{Hom}_{DM^{eff}}(A \otimes \mathbb{Q}(n+i), B \otimes \mathbb{Q}(n+j))$$

где n т.ч. $i+n, j+n \geq 0$

$\otimes$ ф-р: $DM(k)^{eff} \hookrightarrow DM(k)$ полное влож-е

$$A \longmapsto (A, 0)$$

$(A,i) \simeq (A(i), 0)$ где $i \geq 0$

Опр. $\mathbb{Q}(-1) = (pt, -1)$, $\mathbb{Q}(-i) = (pt, -i)$

Замеч. $\mathbb{Q}(-i) \otimes \mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(0)$

- $\underline{Hom}(\mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(0)) = \mathbb{Q}(-i)$, т.е.

$$\underline{Hom}(\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ DM(k)}}{M\otimes\mathbb{Q}(i)}, \mathbb{Q}(0)) \underset{\Uparrow}{=} \underline{Hom}(M, \mathbb{Q}(-i))$$

$-\otimes\mathbb{Q}(i)$ автоэкв-ть

Теор $DM(k)$ <u>жёсткая</u> $\otimes$-кат.

Пример $M(X)^\vee = M(X)(-d)[-2d]$

X гл. <u>проект.</u>, $\dim(X) = d$.

Обозн-ие $M(i) := M\otimes\mathbb{Q}(i)$

$$\begin{tikzcd} M(X)\otimes M(X) & \mathbb{Q}(d)[2d] \arrow[l, "\text{единица}"'] \\ M(X) \arrow[u, bend left] & \end{tikzcd}$$

↙ "старшие гомологии в X"

$$M(X)\otimes\left(M(X)(-d)[-2d]\right) \leftarrow 1$$

Voevodsky
"Triang. cat's of motives over a field"

Замеч $X \hookrightarrow X\times X \Rightarrow$

Mazza, Weibel
Voevodsky

$M(X)$ $\overset{\text{кокомм.}}{\text{коалгебра}}$; $M(X)^\vee$ $\overset{\text{комм.}}{\text{алгебра}}$ в $DM(k)$

Утв. $\underset{\text{гл. непр.}}{Z} \xhookrightarrow{\text{з-тое}} X$, $\operatorname{codim}_X(Z) = c \Rightarrow$

$M(X\setminus Z) \to M(X) \to M(Z)(c)[2c]$ отм. тр-к.

Пример $M(\mathbb{A}^n) = \mathbb{Q}(0)$

$$M(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Q}(0) \oplus \mathbb{Q}(1)[2] \oplus \ldots \oplus \underbrace{\mathbb{Q}(n)[2n]}_{\text{(«фунд. класс»)}}.$$

---

③ Реализации

(A. Huber)

$$\begin{tikzcd} \omega_{dR}: DM(k) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & D^b(Vect^f(k)) \arrow[r, "\sim", "\subset"'] & D_f(Vect(k)) \end{tikzcd}$$

$$M(X) \longmapsto (H^{\bullet}_{dR}(X))^{\vee} \longmapsto R\Gamma(X, \Omega^{\bullet}_X)^{\vee}$$

когомологии де Рама

$k \subset \mathbb{C}$

$$\omega_B : DM(k) \longrightarrow D^b(Vect^f(\mathbb{Q}))$$

$$M(X) \longmapsto H^B_{\bullet}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = S_{\bullet}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$$

когомологии Бетти

$k \subset \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} & \omega_H : DM(k) \arrow[r] & D^b(MH(k)) \arrow[dl, "\omega_B"'] \arrow[d, "\omega_{dR}"] \\ & D^b(Vect^f(\mathbb{Q})) & D^b(Vect^f(k)) \end{tikzcd}$$

триан. ф-р

$$\omega_H(\mathbb{Q}(1)) = \mathbb{Q}(1)_H \in MH(k) \subset D^b(MH(k))$$

$$\Vert$$

$H^2(\mathbb{P}^1)^{\vee}$ (без когом. сдвига)

$$\omega_{\ell} : DM(k) \longrightarrow D^b(Rep^f_{\mathbb{Q}_\ell}(G_k))$$

(F. Ivorra)

ℓ-простое, $\ell \neq char(k)$.

$$M(X) \longmapsto (H^{\bullet}_{et}(X \times_k k^{sep}, \mathbb{Q}_\ell))^{\vee}$$

$$\omega_\ell(\mathbb{Q}(1)) = \mathbb{Q}_\ell(1) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1) = H^2_{et}(\mathbb{P}^1)^{\vee}$$

где $\mathbb{Z}_\ell(1) := \varprojlim_r \mu_{\ell^r}$, $\mu_{\ell^r} \subset (k^{sep})^*$

$$\cdots \to \mu_{\ell^{r+1}} \xrightarrow{\ell} \mu_{\ell^r} \to \cdots$$

модуль над G_k.

Пример $Y \hookrightarrow X \Rightarrow \overset{M(X,Y)}{\overset{\|}{(\underset{-1}{Y} \to \underset{0}{X})}} \in DM(k)^{eff}$

з-тое

относит. мотив.

$M(Y) \to M(X) \to$

$\to M(X,Y) \to \ldots$

отм. тр-к

$$W(M(X,Y)) = H^1(X,Y)$$

Пример $a \in k^* \setminus 1$

$M_a := M(\mathbb{G}_m, \{1,a\})$ мотив Куммера

$$\overset{\vee}{Q(0)} \oplus Q(0) \to \overset{M(\mathbb{G}_m)}{\overset{\|}{Q(0) \oplus Q(1)[1]}} \to M_a$$

$Q(0) \xrightarrow{\simeq} Q(0)$

$\Uparrow$

$\left(\begin{matrix} 1 \hookrightarrow \mathbb{G}_m \\ a \hookrightarrow \mathbb{G}_m \end{matrix} \Rightarrow Q(0) \to M(\mathbb{G}_m) \right)$

$\Rightarrow$ отм. тр-к:

$$Q(0) \to Q(1)[1] \to M_a$$

$$\Updownarrow$$

$$Q(1) \to M_a \to Q(0) \to Q(1)[1]$$

$$\mathrm{Hom}_{DM}(Q(0), Q(1)[1]) \ni [a]$$

Утв. $k^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(Q(0), Q(1)[1])$

$a \longmapsto [a]$

$[ab] = [a] + [b]$

$\omega_H(M_a)$ соотв. расш $\mathbb{Q}(0)_H$ при помощи $\mathbb{Q}(1)_H$.

$$Ext^1(\mathbb{Q}(0)_H, \mathbb{Q}(1)_H = Hom_{D^b(MH(k))}(\mathbb{Q}(0)_H, \mathbb{Q}(1)_H[1])$$

$$\parallel$$

$$k^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \ni [a]_H$$

$$Ext^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Q}(0)_H, \mathbb{Q}(1)_H) = \mathbb{C}^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$$

$k=\mathbb{C}$

Ут $\omega_H([a]) = [a]_H$

$W_\ell(M_a)$ соотв. расш $\mathbb{Q}_\ell(0)$ при помощи $\mathbb{Q}_\ell(1)$

$$Ext^1_{G_k}(\mathbb{Q}_\ell(0), \mathbb{Q}_\ell(1)) =$$

$$= H^1(G_k, \mathbb{Q}_\ell(1)) =$$

$$= \mathbb{Q}_\ell\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1(G_k, \mathbb{Z}_\ell(1)) \simeq \langle \text{теория Куммера} \rangle$$

$$= \mathbb{Q}_\ell\otimes(\ell\text{-адич. поп-ие } k^*) \ni [a]_\ell$$

$$H^1(G_k, \mu_{\ell^r}) = k^*/(k^*)^{\ell^r}$$

$$H^2(G_k, \mathbb{Z}_\ell(1)) = \varprojlim_{r} k^*/(k^*)^{\ell^r} =$$

$$= (\ell\text{-адич. поп. } k^*)$$

Утв $W_\ell([a]) = [a]_\ell$.

④ Мотивные когомологии

Алг. K-теория

- R кольцо $K_0(R) =$

$$= \frac{\mathbb{Z}\cdot[P],\ \text{где } P - \text{КП проект. } R\text{-мод.}}{[P]=[P']+[P''],\ \text{где } P\cong P'\oplus P''}.$$

(Гротендик)

- $R \to S \quad -\otimes_R S \Rightarrow K_0(R)\to K_0(S)$

- $S=R[f^{-1}]$??? $\to K_0(R,S)\to K_0(R)\to K_0(S)\to 0$

R комм.

"Милнор, Введение в K-т"

$K_0(R,S)$ зав-т только от $R/(f)$.

$$\begin{tikzcd} K_0(R) \arrow[r] & K_0(R/I) \arrow[r] & 0 \\ K_0(R,I) \arrow[u] & & \\ \vdots \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

(Thomason–Throbaugh)

Quillen: $X \longmapsto K_i(X),\ i\geq 0$

мн-ие/k $\quad (K_{<0}(X)=0.)$

т.ч. $Y\subset X$ гладкие $\Rightarrow$

$U=X\setminus Y$

$$\ldots \to K_i(X)\to K_i(U)\to$$

$$\to K_{i-1}(X,Y)\to K_{i-1}(X)\to K_{i-1}(U)\to\ldots$$

F поле (или лок. кольцо) $\Rightarrow$

$K_0(F) = \mathbb{Z}$

$K_1(F) = F^*$

$K_1(R) = GL(R)/E(R)$, где

$GL(R) = \varinjlim_n GL_n(R) = \begin{pmatrix} \boxed{*} & 0 \\ 0 & 1 \ddots \end{pmatrix}$,

$\cup$

$E(R)$ порожд. элем. м-цами $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

$1 \to SK_1(R) \to K_1(R) \xrightarrow{\det} R^* \to 1.$

$0 \to SK_0(R) \to K_0(R) \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{rk}} \mathbb{Z} \to 0.$

Замеч.

$K_i(R) = \pi_{i-1}(BGL(R)^+)$,

$i \geq 1$

где · $GL(R)$ дискр. группа

· $BGL(R)$ класс. пр-во

$\downarrow$

· $\pi_1(\downarrow) = GL(R) \rhd E(R) = [E(R), E(R)]$

$BGL(R) \to BGL(R)^+$

$E(R) \to 1.$

(гомол. не мен-ся)

Пример $K_i(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{Z}/(q^i - 1)\mathbb{Z}.$

В топологии:

$K_0^{top}(M)$, $K_1^{top}(M)$, $K_2^{top}(M) \simeq K_0^{top}(M)$

$K_3^{top} \simeq K_1^{top}$

$K_i^{top}(M) = \pi_i(M, BGL(\mathbb{C}))$, где

$GL(\mathbb{C})$ с классич. т-ией

$\pi_i(A,B) := \pi_i(Map(A,B))$

$K_\bullet^{top}(M) \circlearrowleft$ операции Адамса $\Rightarrow$

$$\bigoplus_i K_\bullet^{top}(M)^{(n)}_{\mathbb{Q}} \simeq K_\bullet^{top}(M)_{\mathbb{Q}}$$

Теор (Атья-Хирцебрух)

$$K_0^{top}(M)^{(n)} \simeq H_B^{2n}(M,\mathbb{Q})$$

$$K_1^{top}(M)^{(n)} \simeq H_B^{2n-1}(M,\mathbb{Q}).$$

Теор: X гладк. мн-ие $/k \Rightarrow$

$$K_{2n-i}(X)^{(n)}_{\mathbb{Q}} \simeq$$

$$\simeq Hom_{DM(k)}(M(X), \mathbb{Q}(n)[i]) =: H^i_M(X, \mathbb{Q}(n))$$

мотивные когомологии

(мотивная спектр. п-ть Атья-Хирц)

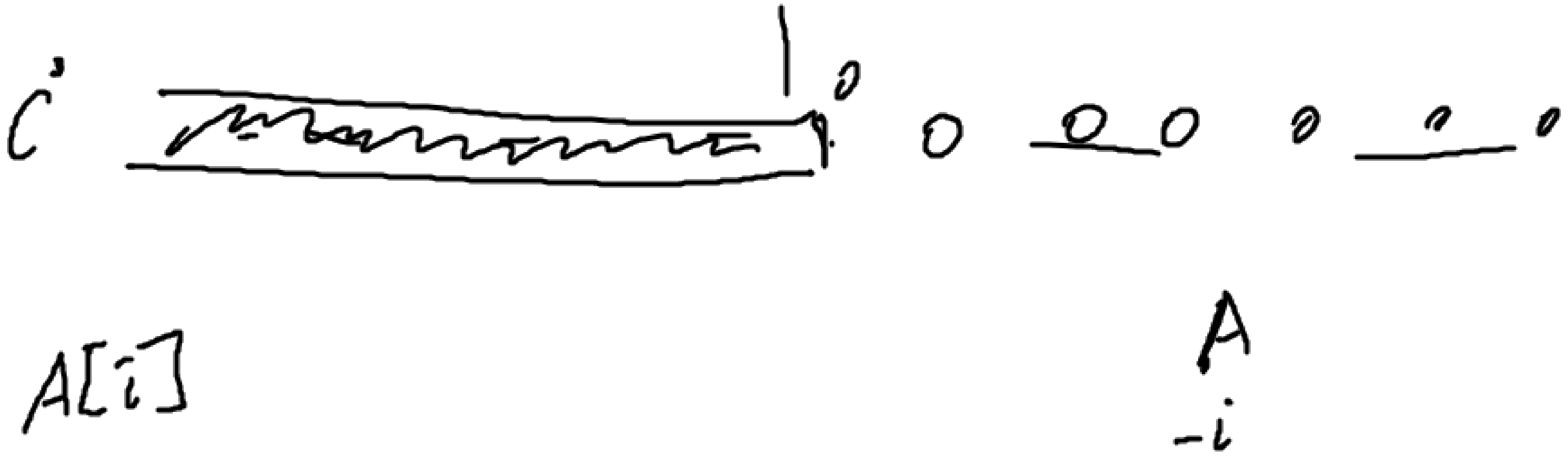
Замеч. $\omega(M(x)) \in D^{\leq 0}$ (когомол.)

в когом. степ. от $-2d$ до 0.

(это гомологии мн-ия X)

Замеч $\mathcal{A}$, $C^\cdot \in D^{\leq 0}(\mathcal{A})$,

$A \in \mathcal{A}$ $\boxed{\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(C^\cdot, A[i]) = 0}$ $i < 0$



Замеч Можно верить,

что $\exists$ абел. к-ия

$MM(k)$ смеш. мотивов$/k$

т.ч. $D^b(MM(k)) = DM(k)$

ω прод-ся до

$$\omega : MM(k) \to \left| \begin{matrix} MH(k) \\ \mathrm{Vect}^f(\mathbb{Q}) \\ \mathrm{Rep}^f_{\mathbb{Q}_\ell}(G_k) \\ \vdots \end{matrix} \right.$$

При этом можно ожидать, что $M(x) \in D^{\leq 0}(MM(k)) \subseteq DM(k)$

Тогда было бы верно:

$\mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(x), \mathbb{Q}(n)[i]) = 0$ при $i < 0$.

Г-за (Бейлинсона-Суле)

$K_{2n-i}(X)^{(n)}_{\mathbb{Q}} = 0$ при $i < 0$

(Это равн-но ∃ мм(k))

Y. André, "Introductions aux motifs"

Борель: k числ. поле, $X = \mathrm{Spec}(k) \Rightarrow$

Г-за БС

Теор. (Л.-Г.) k BS для $X = \mathrm{Spec}(k) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ∃ $MTM(k)$ смеш. мот. Тейта.

абел. к-ия

$$\boxed{d_n \le d_{n-2} + d_{n-3}}$$

$$\boxed{k[t^2] \otimes T(\oplus_{n \ge 0} V_n)}$$

Ext(Q, Q

$$MTM(\mathbb{Q}) \rightsquigarrow MTM(\mathbb{Z})$$

$$\mathrm{Ext}^1_{DM}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) = K_1(k)^{(1)}_{\mathbb{Q}} = k^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

$K_1(F) = F^*$

$K_1(F)^{(i)} = 0$, $i \neq 1$

$K_1(F)^{(1)} = F^*$.