

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 4.**  
**Параллельный перенос и геодезические. 22.03.2022.**

**Задача 1.** Доказать, что если две поверхности в  $\mathbb{E}^3$  касаются вдоль кривой (то есть в точках кривой касательные плоскости к поверхностям совпадают), то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Доказать, что если две поверхности в  $\mathbb{E}^3$  касаются вдоль кривой, которая геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

**Задача 2.** Доказать, что если две поверхности в  $\mathbb{E}^3$  пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают (в такой ситуации говорят, что поверхности пересекаются трансверсально), то эта кривая является прямой.

**Задача 3.** Найти оператор переноса на прямом круговом цилиндре в  $\mathbb{R}^3$ . Как он зависит от кривой?

На какой угол повернётся касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели  $\psi = \psi_0$  на угол  $\alpha$ ?

*Указание: чтобы сформулировать ответ, выберите разумный базис в векторных полях.*

**Задача 4.** Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

*Указание: чтобы сформулировать ответ, выберите разумный базис в векторных полях.*

**Задача 5.** Доказать, что если прямая лежит на поверхности, то она будет геодезической на этой поверхности.

Доказать, что геодезическими на  $k$ -плоскости  $\mathbb{E}^k$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}^n$  являются в точности прямые.

**Задача 6.** Найти геодезические на сфере, цилиндре, круговом конусе (все три поверхности в  $\mathbb{E}^3$ ).

**Задача 7.** Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

**Задача 8.** Описать геодезические на поверхности вращения, получив соотношение между  $r$  и  $\alpha$ , где  $r$  расстояние от точки до оси вращения, а  $\alpha$  угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

**Задача 9.** Найти на круговом конусе самопересекающиеся геодезические. *Указание: рассмотрите развёртку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.*

**Задача 10\*.** Доказать, что геодезические в произвольной параметризации, лежащие на поверхности  $M$  и проходящие через заданные точки  $A$  и  $B$ , совпадают с экстремальными функционала длины

$$L[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt,$$

где  $\gamma(t_0) = A$ ,  $\gamma(t_1) = B$ . Это утверждение обобщает свойство прямой быть кратчайшей, соединяющей две заданных точки.