НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Экзамен. 23.05.2023.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо прислать лектору по электронной почте не позднее вечера вторника 30 мая. Большая просьба по возможности для перевода рукописных работ в файл использовать сканер, а не фотографировать на телефон, присылать один файл в формате pdf, а не кучу файлов в формате jpg, и писать ручкой, а не карандашом.

Если кому-то надо перезачесть оценку во ВШЭ, то надо написать об этом в сопроводительном письме, а также надо прислать работу пораньше, если во ВШЭ оценка нужна не позднее 31 мая.

Пересчет баллов в оценки НМУ следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан в НМУ, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее трёх задач (включая те листки, которые ещё будут появляться после этого экзамена), но возможны ослабления этого критерия в зависимости от общей ситуации со сдачей задач.

Пересчет баллов в оценки ВШЭ следующий: $\min\left(10, \left\lceil \frac{\textit{сумма баллов}}{5} \right\rceil\right)$. *Зачёт для ВШЭ не нужен.*

Задача 1. Рассмотрим кривую, у которой кривизна не обращается в ноль. Пусть $\mathbf{w}$ некоторый постоянный вектор. Доказать, что если в каждой точке кривой соответствующая нормальная плоскость (то есть плоскость, порождённая векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ из репера Френе) содержит вектор $\mathbf{w}$, то кривая плоская *(5 баллов)*.

Задача 2. Поверхность называется *линейчатой*, если она параметрически задается в виде $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$. Докажите, что на линейчатой поверхности гауссова кривизна всюду неположительна *(5 баллов)*.

Задача 3. Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости *(10 баллов)*.

Задача 4. Найти результат параллельного переноса вектора $(0,1,1)$ из точки $(1,0,0)$ однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ в точку $(1,-1,1)$ вдоль прямолинейной образующей

$$\begin{cases} x = 1, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

(10 баллов).

Задача 5. Пусть $[z_0 : \cdots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что *отображение Веронезе* степени d — это отображение $\nu_d : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \ldots : z_n]) = [\ldots : z^I : \ldots], \tag{1}$$

где z^I это некоторый моном степени d от $z_0, \ldots, z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени d. Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^5$, заданное формулой

$$\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0 z_1 : z_0 z_2 : z_1 z_2].$$

Найдите обратный образ $\nu_d^* \gamma^1$ универсального расслоения при этом отображении. *(10 баллов)*.

Задача 6. Пусть M риманово многообразие, то есть многообразие с заданной евклидовой метрикой в касательном расслоении TM (называемой римановой метрикой). Пусть ∇ связность Леви-Чивиты, то есть согласованная с метрикой связность в касательном расслоении, обладающая свойством симметричности: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. Определим гессиан гладкой функции формулой $\operatorname{Hess} f = \nabla df$. Ясно, что это билинейная форма. Докажите, что она симметрична и найдите выражение для $\operatorname{Hess} f(X, Y)$ в локальных координатах и в «безкоординатном» виде, то есть выразив через дифференциал и ковариантные производные. *(10 баллов).*

Задача 7. Метрика в касательном расслоении TM может рассматриваться как тензор g типа $\binom{0}{2}$. Рассмотрим связность ∇ в касательном расслоении TM. Обозначим её продление в расслоение $T^0_2 M$ тоже через ∇. Докажите, что согласованность ∇ с метрикой эквивалентна условию $\nabla g = 0$. *(10 баллов).*

Задача 8. Подмногообразие M риманова многообразия N с индуцированной метрикой называется вполне геодезическим, если все геодезические M являются в то же время и геодезическими N. Доказать, что M вполне геодезическое тогда и только тогда, когда вторая квадратичная форма нулевая. *(5 баллов).*

Задача 9. Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ такая гладкая функция, что $|\operatorname{grad} f| = 1$ на всём M. Доказать, что интегральные кривые векторного поля $\operatorname{grad} f$ являются геодезическими *(10 баллов).*

Задача 10. Докажите, что на многообразии отрицательной секционной кривизны геодезические не содержат сопряжённых точек *(10 баллов).*