НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 8.
Риманова геометрия. 25.04.2023.

Задача 1. Доказать, что геликоид $\mathbf{r}(u,v) = (u\sin v, u\cos v, av)$ и катеноид $\mathbf{R}(u,v) = \left(\sqrt{a^2+u^2}\cos v, \sqrt{a^2+u^2}\sin v, a\ln\frac{u+\sqrt{a^2+u^2}}{a}\right)$ локально изометричны, но не изометричны.

Задача 2. Если ∇ связность в касательном расслоении TM, то она продолжается до связностей во всех тензорных расслоениях T^p_qM. Для простоты будем обозначать эти продолжения связности ∇ тем же символом ∇. Риманова метрика $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ является тензором типа $\binom{0}{2}$. Доказать, что связность ∇ согласована с метрикой g тогда и только тогда, когда она является ковариантно постоянным тензором, то есть когда $\nabla g = 0$.

Задача 3. Доказать, что для n-мерной сферы $\mathbb{S}^n_r \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r с индуцированной стандартной метрикой тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}\left(< Y,Z > X - < X,Z > Y\right),$$

а секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \frac{1}{r^2}$.

Задача 4. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R^1_{12,2}$. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество

$$R = \frac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Задача 5. Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивита ∇ является симметрическим, $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$.

Задача 6. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой и связностью Леви-Чивита. Пусть K гауссова кривизна M. Доказать, что в данном случае

- $\mathrm{Ric}(X,Y) = K\langle X,Y\rangle$, или, в тензорной записи, $R_{ij} = Kg_{ij}$,
- скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$.

Задача 7. Доказать, что для симметричной связности ∇ имеет место тождество Бианки

$$(\nabla_X R)(Y,Z,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,V) = 0,$$

где X, Y, Z и V векторные поля. В компонентах это тождество имеет вид

$$\nabla_m R^l_{ij,k} + \nabla_i R^l_{jm,k} + \nabla_j R^l_{mi,k} = 0.$$

Задача 8. Для связности в касательном расслоении доказать следующие тождества:

- первое структурное уравнение Картана $de^i = e^j \wedge \Gamma^i_j + T^i$,
- второе структурное уравнение Картана

$$d\Gamma^j_i = \Gamma^k_i \wedge \Gamma^j_k + F^j_i,$$

- первое тождество Бианки

$$dT^i = -T^j \wedge \Gamma^i_j + e^j \wedge F^i_j,$$

- второе тождество Бианки

$$dF_i^j = \Gamma_i^k \wedge F_k^j - F_i^k \wedge \Gamma_k^j,$$

где e^i дуальный базис к выбранному базису e_i в векторных полях, Γ_j^i локальная 1-форма связности,

$$F_i^j = R_{kl,i}^j e^k \otimes e^l = \sum_{k<l} R_{kl,i}^j e^k \wedge e^l$$

локальная 2-форма кривизны, а T^i локальные 2-формы кручения,

$$T^k = T_{ij}^k e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T_{ij}^k e^i \wedge e^j.$$

Задача 9. Пусть M риманово многообразие, а ∇ — связность Леви-Чивиты. Определим гессиан гладкой функции по формуле

$$\operatorname{Hess} f = \nabla df.$$

Ясно, что это билинейная форма. Докажите, что она симметрична и найдите выражение для $\operatorname{Hess} f(X, Y)$ в локальных координатах и в «безкоординатном» виде, то есть выразив через дифференциал и ковариантные производные.

Пусть M подмногообразие риманова многообразия $\tilde{M}$, на котором мы рассматриваем индуцированную метрику. Пусть f — гладкая функция на $\tilde{M}$. Найдите соотношение, связывающее гессиан на M ограничения $f|_M$ с гессианом f на $\tilde{M}$ и другими геометрическими объектами.

Задача 10. Пусть g риманова метрика на многообразии M, а X — векторное поле. Выразить производную Ли $L_X g$ через ковариантные производные.

Векторное поле X на римановом многообразии называется полем Киллинга, если оно сохраняет метрику g, то есть если $L_X g = 0$. Выразите это условие через связность Леви-Чивиты.

Опишите киллинговы векторные поля на сфере со стандартной метрикой.