НМУ, Алгебра-2
Листок 9. 24.04.2023

Задача 1.
Докажите, что уравнение $x^p - x = t^{-1}$ не имеет решений в $\overline{\mathbb{F}}_p((t^{1/n}))$ ни для какого n.

Задача 2.
Пусть K — конечное расширение $\mathbb{Q}_p$. Докажите, что существует конечное расширение E поля $\mathbb{Q}$ той же степени и такое, что E плотно в K.

Задача 3.
Докажите, что для $p > 2$ группа корней из 1 поля $\mathbb{Q}_p$ — циклическая порядка $p-1$. Что получится при $p = 2$?

Задача 4.
Пусть $A \subset B$ — кольца и B конечно порождено как A-модуль, $e_1, \dots, e_n$ порождают B. Положим

$$\operatorname{disc}_A(B; e_1, \dots, e_n) = \det(\operatorname{Tr}_{B/A} e_i e_j).$$

а) Пусть $\mathcal{O}_K$ — кольцо целых числового поля K. Докажите, что $D_K = \operatorname{disc}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K)$ не зависит от выбора базиса в $\mathcal{O}_K$.

б) Вычислите D_K для $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, где $D \neq 1$ — произвольное бесквадратное целое число.

Задача 5.
Пусть, как и ранее, K — конечное расширение $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_K$ — его кольцо целых.

а) Докажите, что для любого $\mathbb{Z}-$базиса $e_1, \dots, e_n$ в $\mathcal{O}_K$ и любого простого числа p выполнено сравнение

$$D_K \equiv \operatorname{disc}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{O}_K/(p); e_1 \mod p, \dots, e_n \mod p) \pmod p.$$

б) Простое число p называется разветвлённым в K, если существует простой идеал $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ такой, что $\mathfrak{p}^2 \mid (p)$. Докажите, что p разветвлено тогда и только тогда, когда $p \mid D_K$.

Задача 6.
Существует ли последовательность рациональных чисел $r_n \neq 0$ такая, что ряд

$$\sum_n r_n$$

сходится во всех $\mathbb{Q}_p$ и в $\mathbb{R}$?