

**Задача 1.** Пусть  $G$  – группа Ли, а  $H$  – подгруппа Ли. Докажите, что если  $H$  и аналитическое многообразие  $G/H$  связны, то и  $G$  связна.

**Задача 2.** Пусть  $G$  – группа Ли,  $M$  – гладкое порядка  $k$  многообразие ( $k \geq 1$ ),  $A$  – действие  $G$  на  $M$ . Пусть  $A_x : x \mapsto Gx$ .

- Докажите, что  $\text{rk} A_x$  постоянно на  $M$ . Обозначим его через  $m$ .
- Докажите, что стабилизатор  $G_x$  является подгруппой Ли размерности  $\dim G - m$ .
- Докажите, что для некоторой окрестности единицы  $U \subset G$  множество  $Ux$  является подмногообразием  $M$  размерности  $m$ .
- Докажите, что если некоторая орбита является  $C^k$ -подмногообразием в  $M$ , то она имеет размерность  $m$ .
- Предположим, что  $G$  компактна. Докажите, что тогда все орбиты являются  $C^k$ -подмногообразиями в  $M$ .

**Задача 3.** Пусть дано транзитивное дифференцируемое действие группы Ли  $G$  на связном дифференцируемом многообразии  $M$ . Докажите, что

- группа  $G^0$  также действует транзитивно на  $M$ ,
- $G/G^0 \simeq G_x/(G_x \cap G^0)$  для всех  $x \in M$ ,
- если  $G_x$  связна для всех  $x \in M$ , то  $G$  связна.

**Задача 4.** Пусть  $G$  – компактная связная комплексно-аналитическая группа Ли размерности  $n$ . Докажите, что  $G$  абелева. А именно,  $G$  изоморфна  $\mathbb{C}^n/\Gamma$ , где  $\Gamma$  – решётка  $\mathbb{Z}(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$  в  $\mathbb{C}^n$ ,  $\gamma_i \in \mathbb{C}^n$ .

Задачи можно сдавать:

Каринэ Куюмжиян [karina@mscme.ru](mailto:karina@mscme.ru) по понедельникам с 19.20 до 20.50 в НМУ

Борис Билич - онлайн (договариваться через телеграм)

Илья Левин - онлайн (договариваться через телеграм)