НМУ, I курс, 09.02.2023

Листок 1.

Задача 1. Пусть $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Докажите, что пространства $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ и $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ полны, гомеоморфны, но не изометричны.

Задача 2. Пусть V — непустое выпуклое множество в линейном пространстве X (над $\mathbb{R}$), причем $0 \in V$ и всякая прямая, проходящая через 0, пересекается с V по некоторому интервалу или целиком лежит в V. Выражение

$$p_V(x) = \inf\left\{t > 0\colon \frac{x}{t} \in V\right\}$$

называется *функционалом Минковского.*

(a) Докажите, что $p_V(\alpha x) = \alpha p_V(x)$ для всех $\alpha \geq 0$, $p_V(x+y) \leq p_V(x) + p_V(y)$.

(b) Докажите, что $\{x\colon\ p_V(x) < 1\} \subset V \subset \{x\colon\ p_V(x) \leq 1\}$.

(c) Найдите $p_V(x)$, если $V = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x_1| \leq 1\}$.

(d) Опишите множества V, для которых p_V является нормой.

Задача 3. Предположим, что открытое и ограниченное множество $V \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Докажите, что V гомеоморфно открытому единичному шару.

Задача 4. Пусть $v^1, \ldots v^m$ — вектора в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что «конус»

$$\{t_1 v^1 + \ldots + t_n v^n\colon\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \ldots, t_m \geq 0\}$$

является замкнутым множеством.

Задача 5. Пусть $f_n, f \in C^\infty[0,1]$. Будем говорить, что $f_n \to f$, если

$$\max_{x\in[0,1]} \left|f_n^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)\right| \to 0$$

при $n \to \infty$ для всех $j \geq 0$. Докажите, что такая сходимость задается метрикой, но не задается нормой.

Пусть X, Y – векторные пространства над $\mathbb{R}$. Отображение $L\colon X \mapsto Y$ называется линейным, если $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x, y \in X$. Линейное отображение еще называют линейным оператором. Если $Y = \mathbb{R}$, то L называют линейным функционалом.

Задача 6. Пусть $L, L_1, \ldots, L_n$ – линейные функционалы и ядро L содержит $\cap_k \operatorname{Ker} L_k$. Докажите, что $L = c_1 L_1 + \ldots + c_n L_n$.

Задача 7. Докажите, что непрерывность линейного функционала равносильна замкнутости его ядра. Верно ли аналогичное утверждение для линейных операторов?

Выражение

$$\|L\| = \sup_{x\colon\ \|x\|=1} \|L(x)\|$$

называется *нормой* линейного оператора L.

Задача 8. Пусть L — линейный функционал, причем $\|L\| = 1$. Докажите, что

$$|L(x)| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} L),$$

причем расстояние достигается тогда и только тогда, когда достигается sup в определении нормы. Напишите формулу для вычисления расстояния от плоскости $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ до точки $(c_1, \ldots, c_n)$ в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой.

Задача 9. Найдите норму функционала

$$L(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int_{0}^{1} x(t)\,dt$$

в пространстве $C[-1,1]$. Докажите, что норма не достигается, то есть в определении нормы нельзя заменить sup на максимум.

Задача 10. Пусть $L(x) = Ax\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, где A – матрица $n \times n$ и рассматривается пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой.

(a) Докажите, что норма $\|L\|$ равна $\sqrt{\lambda}$, где λ – наибольшее собственное значение матрицы A^*A.

(b) Найдите норму оператора на $\mathbb{R}^2$, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 11. Возьмем на $\mathbb{R}^n$ норму $\|x\| = \max |x_i|$. Найдите норму оператора, заданного матрицей A.

Задача 12. Пусть L – линейный непрерывный оператор на полном нормированном пространстве.

(a) Докажите, что ряд $e^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!}$ сходится по норме в пространстве непрерывных операторов.

(b) Пусть $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$. Докажите, что $e^{L_1+L_2} = e^{L_1} \circ e^{L_2}$.

(c) Пусть $a, \lambda \in \mathbb{R}$. Найдите экспоненту оператора $L = a\frac{d}{dx}$ на конечномерном пространстве $\mathcal{P}_m$, которое является линейной оболочкой функций вида $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}$.