Листок 2.

Задача 1. Докажите, что следующие отображения дифференцируемы на своей области определения и найдите их дифференциалы:

(a) $f(x) = L(x)$ – линейный непрерывный оператор;

(b) $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 \ldots + x_n^2$;

(c) $f\colon M^n \mapsto M^n$, $f(x) = x^k$, где M^n – матрицы $n \times n$ и $k \geq 1$;

(d) $f\colon M^n \mapsto M^n$, $f(x) = x^{-1}$;

(e) $f\colon M^n \mapsto M^n$, $f(x) = e^x$;

(f) $f\colon M^n \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \det x$;

Задача 2. (a) Пусть B — открытый круг в $\mathbb{R}^2$, у функции $f\colon B \to \mathbb{R}$ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ на B. Докажите, что f не зависит от x.

(b) Пусть U – открытое связное множество в $\mathbb{R}^2$, функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ дифференцируема и $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ на U. Верно ли, что f не зависит от x?

Задача 3. (a) Пусть кривая $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [0, 1]$, задана непрерывно дифференцируемыми функциями $x_k(t)$ Предположим в каждой точке кривой вектор скорости $\dot\gamma$ перпендикулярен градиенту функции f. Докажите, что f постоянна на γ.

(b) Опишите все дифференцируемые функции $f(x, y)$, удовлетворяющие уравнению $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, где a, b – некоторые числа.

Задача 4. Пусть у функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ в каждой точке существуют обе частные производные. Докажите, что функция f в некоторой точке дифференцируема.

Задача 5. Пусть X — компактное метрическое пространство, Y — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция (на $X \times Y$ метрика равна сумме метрики X и евклидовой метрики $\mathbb{R}^n$). Положим $F(y) = \sup\limits_{x \in X} f(x, y)$.

(a) Докажите, что функция F непрерывна на Y.

(b) Найдите функцию F, если $f(x, y) = xy$, где $x \in [-1; 1]$, $y \in (-1; 1)$.

(c) Предположим, что при каждом x функции $y \to f(x, y)$ дифференцируема на Y и все её частные производные $f_{y_i}(x, y)$ непрерывны по совокупности переменных. Предположим, что при некотором y_0 у функции $x \to f(x, y_0)$ существует единственная точка максимума x_0. Докажите, что функция F дифференцируема в точке y_0 и $\operatorname{grad} F(y_0) = \operatorname{grad}_y f(x_0, y_0)$.

Задача 6. Приведите пример функции f двух переменных, у которой

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Задача 7. Пусть $f(x, y)$ является n — раз дифференцируемой функцией. Докажите, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)\Big|_{x=y} = \frac{d^n}{dx^n} f(x, x).$$

Примените это равенство к функции $f(x, y) = g(x)h(y)$ и получите формулу Лейбница

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(g(x)h(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x).$$

Задача 8. Пусть $g\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ – дважды дифференцируемое отображение (т. е. $g = (g_1, \ldots, g_m)$ и g_i – дважды дифференцируемые функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$). Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ – дважды дифференцируемая функция. Найдите $d^2(f \circ g)$. Запишите при $n = 3$ оператор Лапласа $\Delta f = f_{x_1x_1} + \ldots + f_{x_nx_n}$ в сферической системе координат.

Задача 9. При всех значениях коэффициентов a, b, c найдите критические точки функции $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ и выделите из них точки локального минимума и локального максимума.

Задача 10. Найдите критические точки функции и выделите из них точки локального минимума и локального максимума:

$$(a)\, f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y, \quad (b)\, f(x, y) = x^4 + y^4 - 36xy,$$
$$(c)\, f(x, y) = x^2 + 3xy - 8\ln|x| - 6\ln|y|, \quad (d)\, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z,$$
$$(e)\, f(x, y, z) = yx^3z^2(2 - y - 2z - 3x).$$

Будем говорит, что функция f на $\mathbb{R}^n$ выпукла, если

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y)$$

для всех x, y и всех $\alpha \in [0, 1]$.

Задача 11. (a) Пусть f – дифференцируемая функция. Докажите, что выпуклость функции f равносильна неравенству

$$\langle \mathrm{grad} f(x) - \mathrm{grad} f(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Докажите, что выпуклость функции f равносильна неравенству $d^2 f(h) \geq 0$.

Задача 12. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция. Докажите, что из существования частных производных у функции f точке a следует дифференцируемость f в точке a.

Задача 13.(Метод градиентного спуска) Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема и $m\|h\|^2 \leq d^2 f(h) \leq M\|h\|^2$, где $m, M > 0$. Пусть $x_{n+1} = x_n - \gamma \cdot \mathrm{grad} f(x_n)$, где $0 < \gamma < 2/M$. Докажите, что последовательность x_n сходится к точке минимума функции f. Проиллюстрируйте этот метод на примере функции $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Задача 14. Существует ли дифференцируемое отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, которое отображает ось OX на график функции $y = |x|$?

Задача 15. Существует ли такой диффеоморфизм некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^2$ точки $(0, 0)$ на некоторую окрестность $V \subset \mathbb{R}^2$ точки $(0, 0)$, что образ части графика

(a) $y = x^3 \sin \frac{1}{x}$, $y(0) = 0$, (b) $y = |x|$ из этой окрестности является интервалом $\{(x, 0)\colon \alpha < x < \beta\}$ на оси Ox?