НМУ, I курс, 27.04.2023

Листок 5.

Задача 1.

(a) Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$. Найдите минимальную сигма-алгебру на X, относительно которой функция f измерима.

(b) Опишите минимальную сигма-алгебру на $\mathbb{R}^2$, относительно которой измерима функция $f(x,y) = x + y$.

Задача 2. Пусть f_n – последовательность $(X, \mathcal{A})$ – измеримых функций. Докажите, что функции $\sup_n f_n(x)$ и $\inf_n f_n(x)$ измеримы. Приведите пример, что для несчетного набора функций это утверждение неверно.

Задача 3. Пусть $f\colon \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ и при каждом y функция $x \to f(x,y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а при каждом x функция $y \to f(x,y)$ измерима относительно сигма алгебры $\mathcal{A}$ на Y. Докажите, что f измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$.

Задача 4. Пусть $f(x,y)$ при каждом y интегрируема по Риману на $[a,b]$ по x, и при каждом x эта функция является $(Y, \mathcal{B})$ – измеримой по y. Докажите, что

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

является измеримой функцией на $(Y, \mathcal{B})$.

Задача 5. Приведите пример двух измеримых по Лебегу функций $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$, композиция которых $f \circ g$ не является измеримой по лебегу функцией.

Задача 6. Приведите пример измеримой по Лебегу функции f на $[0,1]$ такой, что всякая измеримая функция g, совпадающая почти всюду с f, всюду разрывна.

Задача 7. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Докажите, что если f измерима по Лебегу, то $f(x) = kx$.

Задача 8. Постройте пример такой последовательности неотрицательных и интегрируемых по Лебегу на $[0,1]$ функций f_n, что f_n сходятся к нулю поточечно, интегралы от f_n сходятся к нулю, но функция $\Phi(x) = \sup_n f_n(x)$ не интегрируема.

Задача 9. Пусть f_n — последовательность неотрицательных интегрируемых по Лебегу на $[0,1]$ функций, интегралы от которых стремятся к нулю. Докажите, что для некоторой подпоследовательности f_{n_k} функция $\Phi(x) = \sup_k f_{n_k}(x)$ интегрируема.

Задача 10. Выясните при каких α, β функция f интегрируема на $[0,1]$ по мере Лебега, если

(a) $f(x) = x^\alpha |\ln x|^\beta$, (b) $f(x) = x^\alpha \sin(x^{-\beta})$.

Задача 11. Пусть f_n – последовательность измеримых функций, которые почти всюду сходятся к функции f отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) e^{-f_n^2(x)}\,dx = \int_0^1 f(x) e^{-f^2(x)}\,dx.$$

Задача 12. Интегрируемые по Лебегу на $[0,1]$ функции f_n сходятся почти всюду к нулю и выполняется неравенство

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx \le 4 \int_0^1 |f_n(x)|\,dx.$$

Докажите, что интегралы $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\,dx$ стремятся к нулю.

Задача 13.

(a) Пусть $a_n \geq 0$ и $\sum_n a_n < \infty$. Докажите, что для всякой последовательности $\{x_n\}$ ряд

$$\sum_n \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$$

сходится почти всюду на $\mathbb{R}$.

(b) Пусть $a_n \geq 0$ и $\sum_n a_n \ln n < \infty$. Докажите, что для всякой последовательности $\{x_n\}$ ряд

$$\sum_n \frac{a_n}{|x - x_n|}$$

сходится почти всюду на $\mathbb{R}$.

Задача 14. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$. Докажите, что

$$\lim_{h \to 0} \int |f(x + h) - f(x)|\, dx = 0.$$

Задача 15. Пусть μ — конечная мера на X, при каждом x функция $t \to f(t, x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и при каждом t функция $x \to f(t, x)$ интегрируема по мере μ. Докажите, что у функции

$$F(t) = \int f(t, x)\, \mu(dx)$$

есть точка непрерывности.