

ЭКЗАМЕН 21 МАЯ 2023

Задача 1. а) Найти число корней многочлена (посчитанных с учетом кратностей) $4z^6 - 10z^3 - 3$ вне круга $|z| < 1$.

б) Найти число корней многочлена (посчитанных с учетом кратностей) $2z^6 - z^4 + 5z - 1$ в кольце $1 < |z| < 2$.

Задача 2. Найти

$$\int_{|z|=10} \frac{dz}{z^8 - z + 2}.$$

Окружность $|z| = 10$ проходится в положительную сторону.

Задача 3. Для комплексной квадратной матрицы A размера $n \times n$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через r_i сумму модулей внедиагональных элементов i -й строки матрицы A . Покажите, что каждое собственное число $\lambda \in \mathbb{C}$ матрицы A лежит в объединении кругов $U_{r_i}(a_{ii})$.

Задача 4. Голomorphic функция f в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$ удовлетворяет для всех z из этой полуплоскости соотношению $(\operatorname{Re} f(z))^4 - (\operatorname{Im} f(z))^3 = 16$. Можно ли найти такую функцию f , что $f'(2) = 1/2$?

Задача 5. Найти вычеты форм (выбирая однозначные ветви корня)

$$e^{\frac{1}{1+\sqrt{z}}} dz$$

в точке $z = 1$.

Задача 6. Пусть голоморфная в открытом диске функция f имеет в нем два нуля. Верно ли, что производная f' имеет ноль в этом диске?

Задача 7. Найти все рациональные функции, модуль которых равен единице в каждой точке окружности $|z| = 1$.

Задача 8. Пусть функция f мероморфна в компакте $K \subset \mathbb{C}$, граница ∂K которого состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых и не содержит нулей и полюсов функции f . Пусть функция φ голоморфна в K . Найти

$$\int_{\partial K} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

если граница ориентирована так, что компакт лежит "слева".

Задача 9. Функция f голоморфна в открытом круге. Может ли она стремиться к бесконечности при подходе к любой точке граничной окружности?

Задача 10. Рассмотрим многочлен $h(z) = \prod(z - z_i)$, z_1, \dots, z_n - различные точки в \mathbb{C} . Докажите, что

$$\sum \frac{P(z_i)}{h'(z_i)} = 0,$$

для любого многочлена P , такого что $\deg P < \deg h - 1$.