

1 Результаты полученные в этом году

Напомним, что гиперкэлеровой структурой на римановом многообразии называется тройка комплексных структур I, J, K , удовлетворяющих кватернионным соотношениям и согласованных с метрикой, которая является кэлеровой по отношению к I, J, K . Групп голономии таких многообразий является подгруппой в $Sp(n)$, если же она в точности равна $Sp(n)$, то такое гиперкэлеровое многообразие называют простым, или неприводимым. Именно такие многообразия представляют наибольший интерес среди гиперкэлеровых многообразий, поскольку согласно теореме Богомолова любое гиперкэлеровое многообразие конечно покрывается произведением торов и простых. Простых гиперкэлеровых известно достаточно мало – две серии примеров (схемы Гильберта точек на $K3$ и обобщённое многообразие Куммера) и два примера О’Грэди. Таким образом, естественной оказывается гипотеза, что в каждой размерности существует только конечно число простых гиперкэлеровых многообразий с точностью до деформации.

Первым шагом в направлении этой гипотезы является получение ограничений на числа Бетти гиперкэлеровых многообразий. В размерности четыре это удалось Гуану. В больших размерностях также можно получить ограничения на числа Бетти, используя теоремы Вербицкого и Луенги-Лунца о действии алгебры Ли $\mathfrak{so}(b_2 + 2)$, порождённой всеми возможными левещевыми тройками операторов, на когомологиях и инварианты Розанского-Виттена. Эти инварианты изучались в работах Сейвона и Хитчина и определяются они как свёртка по всем рёбрам тривалентного графа с $2k$ вершинами голоморфно-симплектической формы и тензора, состоящего из произведения $2k$ -копий тензора кривизны. В работах Сейвона и Хитчина были подсчитаны инварианты для наиболее простых графов. Ранее нами были получены неравенства на числа Бетти гиперкэлеровых многообразий, следующие из значений инвариантов Розанского-Виттена для простых графов, определённых в работах Сейвона и Хитчина. Например, в размерности шесть имеем:

$$97 + \frac{37}{2}b_3 - \frac{19}{2}b_4 - \frac{b_5}{2} + \frac{23}{2}h^{2,2} \leq \frac{38b_2^2 - 1030b_2 + 7572}{b_2 + 1}. \quad (1)$$

С использованием неравенства на числа Бетти в размерности шесть (1) и недавних результатов Сейвона показано, что если M – гиперкэлерово многообразие размерности шесть с $b_5 = 0$ и $b_2 = 23$, то возможны следующие комбинации чисел Бетти

$$\begin{array}{l} b_4 \quad 299 \quad 276 + k \\ b_6 \quad 2554 \quad 2422 + 6k, \end{array}$$

где k – от 0 до 10.

Также неравенство на числа Бетти простых гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть позволяет получать ограничения на число наборов чисел Бетти и для других значений b_2 . В частности, можно получить ограничения на числа Бетти и

Ходжа для шестимерного многообразия О'Грэди. Точные значения чисел Ходжа шестимерного многообразия О'Грэди посчитаны в работе Монгарди, Рапаньета, Сакка (2016) и, оказывается, что, как и в случае схемы Гильберта неравенство (1) обращается в равенство. Более того, используя результаты Сейвона можно получить условия обращения неравенства (1) в равенство.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

1. Kurnosov N., *Constraints on Betti numbers of hyperkähler sixfolds with $b_2 = 23$* , Proceedings of MiniPAGES, Warsaw, 2016, submitted.

3 Диссертация

Подготовлена диссертация по теме "Числа Бетти и трианалитические подмногообразия гиперкэлеровых многообразий" под руководством М. Вербицкого (предполагаемая дата защиты – 26 января 2017 года).

4 Участие в конференциях и школах

4.1 Как участник

1. Geometry and Physics: Mirror symmetry, Hodge theory, and related topics, University of Miami, January 25-30, 2016.
2. Poster "*Cohomology and subvarieties of hyperkähler manifolds*", BrAG, Edinburgh, 13-17 April, 2016.
3. GLEN seminar, Sheffield, June 20-21, 2016.
4. Varieties with trivial canonical bundles, 12-18 June 2016, B?dlewo.
5. Лекции "*Кубические формы*" (вместе с С.С. Галкиным), ЛШСМ, Дубна, 18-30.07.2016
6. Доклад "Ограничения на когомологии гиперкэлеровых многообразий", VI Международная конференция по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре, Коряжма, 03-09.08.2016.
7. The different faces of geometry, a workshop in honour of Fedor Bogomolov, 12-14 September 2016, Nottingham
8. Talk "*Absolutely trianalytic tori in Hyperkähler manifolds*", International Conference Geometric Analysis and Control Theory, Novosibirsk, Russia, 8-12.12.2016.

4.2 Доклады на семинарах и в научных центрах

1. Talk *On the boundness of the second Betti number of hyperkahler manifolds*, NYU, Courant, 02.02.2016.
2. Talks *Inequalities involving Betti numbers of hyperkähler manifolds and Trianalytic subvarieties*, miniPages, Warsaw, May, 2016.

3. Talk *Betti numbers and trianalytic subvarieties*, IUM, ИТП & Poncelet Laboratory seminar, 19.09.2016.
4. Talk *Betti numbers and trianalytic subvarieties*, Postnikov seminar, Moscow State University, 20.09.2016.
5. Talk *Absolutely trianalytic tori in hyperkähler manifolds*, Vitushkin seminar, Moscow State University, 08.11.2016.
6. Talk *Cohomological constraints for hyperkaehler manifolds*, Geneve, 25.11.2016.
7. Talk *Cohomological constraints for hyperkaehler manifolds*, Seminar "Hodge structures and rationality problems", University of Zürich, 25.11.2016.
8. Доклад *Гиперкэлеровы многообразия: числа Бетти и подмногообразия*, Геометрия, топология и их приложения, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 12.12.2016

4.3 Как организатор

1. Spring School-Conference Surfaces in positive characteristic, April 4-8, 2016.
2. Lutsinofest, June 20-21, 2016.
3. School Introduction to birational geometry, November 10-11, 2016.
4. School-Conference Groups of birational automorphisms, November 14-18, 2016.

5 Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь стажёром-исследователем Лаборатории Алгебраической Геометрии и её приложений (НИУ ВШЭ). Работал в Stefan Vanach International Mathematical Center по программе miniPAGES (1-13.05.2016) и в университетах Женевы и Цюриха (21-30.11.2016).

6 Педагогическая деятельность

В весеннем семестре был ассистентом С.С. Галкина на курсе "Алгебраические поверхности" и семинаре "Разнообразие многообразий" (ВШЭ). Совместно с С.С. Галкиным прочитал курс "Кубические формы" в Летней школе "Современная математика" в июле 2016 года. Также в течение года являлся соорганизатором семинаров "Геометрические структуры на многообразиях" и семинара Лаборатории Алгебраической Геометрии и её приложений (ВШЭ). В осеннем семестре был ассистентом Е.Ю. Смирнова на курсе Алгебра-1 (НМУ). Преподаю математический анализ в 57 школе.