

Отчёт по гранту «Молодая математика России» за 2017 год

Курносков Н.М.

1 Результаты полученные в этом году

Риманово многообразие называется с тройкой комплексных структур I, J, K , удовлетворяющих кватернионным соотношениям и согласованных с метрикой, которая является кэлеровой по отношению к I, J, K , называется гиперкэлеровым. Такие многообразия также можно охарактеризовать в терминах классификации по теореме Берже – группы голономии таких многообразий является подгруппой в $Sp(n)$. Многообразия, группа голономии которых равна $Sp(n)$, называют простыми, или неприводимыми. Согласно теореме Богомолова любое гиперкэлеровое многообразие конечно накрывается произведением торов и простых. Простых гиперкэлеровых известно достаточно мало – две серии примеров (схемы Гильберта точек на $K3$ и обобщённое многообразие Куммера) и два примера О’Грэди. Таким образом, естественной оказывается гипотеза, что в каждой размерности существует только конечно число простых гиперкэлеровых многообразий с точностью до деформации (гипотеза Бовилля).

Необходимо отметить, что на когомологиях гиперкэлера многообразия есть разложение Ходжа (она совпадает с весовым разложением относительно операторов Вейля), причём структура Ходжа на вторых когомологиях имеет тип $K3$. В своё время Куга, Сатаке предложили конструкцию, позволяющую сопоставлять структуре Ходжа H типа $K3$ структуру Ходжа V веса 1, где V – чётная часть алгебры Клиффорда H с формой пересечения q . Таким образом, в случае целочисленной структуры Ходжа мы получаем комплексный тор, при наличии поляризации можно получить абелево многообразие. Аналогичную конструкцию возможно использовать и для гиперкэлеровых многообразий, если вместо формы пересечения использовать форму Бовилля-Богомолова-Фуджики. В первую очередь возникает естественный вопрос, что при таком сопоставлении происходит с остальными когомологиями гиперкэлера многообразия и возможно ли построить отображение из когомологий гиперкэлера многообразия в когомологии тора, которое бы сохраняло и структуру модулей и структуру Ходжа.

В своей работе с А. Солдатенковым и М. Вербицким мы дали положительный ответ на этот вопрос, доказав следующую теорему:

Теорема 1: Пусть M гиперкэлерово многообразие. Тогда существует целое $l \geq 0$, комплексный тор T , вложение $\mathfrak{g}_{tot}(M) \hookrightarrow \mathfrak{g}_{tot}(T)$ алгебр Ли и вложение $\Psi : H^\bullet(M, \mathbb{C}) \hookrightarrow H^{\bullet+l}(T, \mathbb{C})$ $\mathfrak{g}_{tot}(M)$ -модулей, такое что для каждой комплексной структуры I гиперкэлерового типа на M существует комплексная структура на T , такая что Ψ - морфизм структур Ходжа.

При этом, если исходная структура Ходжа допускала поляризацию, то поляризация будет и на структуре Ходжа комплексного тора. Как и в классической конструкции Куга-Сатаке доказательство использует алгебру Клиффорда для структуры Ходжа H типа $K3$ и формы Бовилля-Богомолова-Фуджики, но основной трудностью является построение подходящего модуля над этой алгеброй Клиффорда.

В дальнейшем одной из основных задач является доказательство невырожденности обобщённой формы Бовилля-Богомолова-Фуджики, действующей на чётных когомологиях гиперкэлера многообразия. Существования такой формы позволит получать новые ограничения на когомологии гиперкэлера многообразия и продвинуться в доказательстве гипотезы Бовилля.

Также автор совместно с Ф. Богомоловым и Ф. Буонерба получил новое доказательство классификации VII_0 -поверхностей с $b_2 = 0$ с использованием арифметических групп: каждая VII_0 -поверхность с $b_2 = 0$ имеет голоморфное слоение. Тем самым, это либо поверхность Хопфа, либо Иноэ.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

1. Kurnosov N., Soldatenkov A., Verbitsky M., *Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkahler manifolds*, Preprint arXiv:1703.07477v1 [math.AG]. *Submitted to Adv. in Math.*

2. Buonerba F., Bogomolov F., Kurnosov N., *Classifying VII_0 surfaces with $b_2 = 0$ via arithmetic groups*, arXiv preprint arXiv:1709.00062v1 [math.AG] *Submitted to Eur. J. Math.*

3 Диссертация

Защищена диссертация "Числа Бетти и трианалитические подмногообразия гиперкэлера многообразий" под руководством М. Вербицкого (дата защиты – 26 января 2017 года).

4 Участие в конференциях и школах

4.1 Доклады на конференциях, семинарах и в научных центрах

1. Talk "*Absolutely trianalytic subvarieties in Hyperkahler manifolds*", ULB Geometry seminar, Brussels, 13 February 2017.

2. Talk "*Absolutely trianalytic subvarieties in Hyperkahler manifolds*", Workshop on holomorphic symplectic varieties, Lille, 8-10 March 2017.

3. Talk "*Geometry of Hyperkahler manifolds*", King's College London, London, 23 March 2017.

4. Talk "*Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkahler manifolds*", Geometry and Topology conference in Gökova, 29-2 June 2017.

5. Talk "*Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkahler manifolds*", UGA, 13.09.2017.

6. Talk "*Lagrangian fibrations and hyperkaähler manifolds*", UGA, 18.09.2017.

7. Talk "*Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkahler manifolds*", NYU, Courant, 27.10.2017.

8. Talk "*Kuga-Satake construction and cohomology of hyperkahler manifolds*", Hyperkähler saturday, 25.11.2017.

9. Talk "*Kuga-Satake construction and obstructions for cohomology of hyperkahler manifolds*", Algebraic Geometry in Mexico, Puerto Exscondido, 03.12.2017.

10. Poster "*Cohomology of hyperkahler manifolds: Kuga-Satake construction and bounds for Betti numbers*", AGNES, Boston, 15.10.2017.

11. Talk "*Cohomology of hyperkahler manifolds*", Lutsinofest, 24.06.2017.

4.2 Как организатор

1. Spring school-conference Birational geometry in positive characteristic, April 3-7, 2017.
2. Lutsinofest, June 22-25, 2017.
3. Летняя школа "Фонтанка-2017" , Санкт-Петербург, 2-8 июля 2017.
4. Summer School "Algebra and Geometry" in Yaroslav', July 25-31, 2017.
5. Hyperkähler saturday, November 25, 2017.

5 Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь научным сотрудником (с марта 2017 г.) Лаборатории Алгебраической Геометрии и её приложений (НИУ ВШЭ). С сентября 2017 г. сотрудник университет Джорджии.

6 Педагогическая деятельность

В весеннем семестре был ассистентом М.С. Вербицкого на курсе "Комплексно-аналитическая геометрия" (ВШЭ). В течение года являлся соорганизатором семинаров "Геометрические структуры на многообразиях" и семинара Лаборатории Алгебраической Геометрии и её приложений (ВШЭ). Выступал рецензентом дипломной работы студента факультета математики ВШЭ А. Зимина (рук. В.С. Жгун).