

Н. Семенякин. Отчёт за второй год получения стипендии "Молодая математика России".

За третий год аспирантуры (второй год получения стипендии "Молодая математика России") я получил несколько научных результатов:

- Я продолжаю работу по исследованию деавтономизаций кластерных интегрируемых систем. В рамках этой работы, мною была получена формула для квазиклассической асимптотики собственной функции с нулевым собственным значением, для деавтономизованного оператора Кастеляйна. Нетривиальным свойством этой формулы является то, что она даёт некоторую специальную нормировку для функции Бейкера-Ахиезера интегрируемой системы, в виде

$$\vec{\psi}(z) = \vec{\eta}(z) \exp \left(- \int \frac{\vec{\xi}^T(z) \partial_w K(z, w(z)) d\vec{\eta}(z)}{\vec{\xi}^T \partial_w K(z, w(z)) \vec{\eta}(z)} \right), \quad (1)$$

где $K(z, w)$ - оператор Кастеляйна соответствующей интегрируемой системы, а вектора $\vec{\eta}(z), \vec{\xi}^T(z)$ определяются "on-shell" спектральной кривой $P(z, w) = \det K(z, w) = 0$ как левые и правые собственные вектора

$$\vec{\xi}^T(z) K(z, w(z)) = 0, \quad K(z, w(z)) \vec{\eta}(z) = 0 \quad (2)$$

нормированные произвольным образом. В следствии того, что формула (1) является инвариантной относительно замен $\vec{\xi} \mapsto \alpha(z)\vec{\xi}, \vec{\eta} \mapsto \beta(z)\vec{\eta}$, полученная нормировка является "калибровочно - инвариантной" и, в некотором смысле канонической. Интересным вопросом является применимость такой волновой функции для процедуры разделения переменных в соответствующей интегрируемой системе.

Следующей задачей, которая находится в процессе решения и отделяет меня от написания статьи в рамках этого проекта, является квазиклассическое вычисление функции Грина оператора Кастеляйна. Нахождение её явного вида было бы полезно с точки зрения исследования статистической физики димерных систем, так как решало бы задачу про "униформизацию Гауссовских флуктуаций" предельной формы для произвольных димерных моделей и граничных условий.

- Совместно с М. Берштейном, П. Гавриленко и А. Маршаковым мы изучаем отображение кластерных интегрируемых систем, соответствующее мутации многоугольников Ньютона их спектральных кривых. Мы применяем несколько подходов к исследованию проблемы. Во-первых, мы изучаем алгебру Гамильтонианов, задающих гамильтонову редукцию на некоторых специальных симплектических листах, и получаем явные формулы для функций, инвариантных относительно действия этих гамильтонианов, которые, при правильном выборе, задают кластерные координаты на редукции. Вычисление этих функций возможно при помощи поиска кластера, в котором гамильтонианы редукции являются X-кластерными переменными. Во-вторых, мы ожидаем что существуют клетки Брюа в неафинных группах Пуассона-Ли, из которых искомые клетки в афинных группах могут быть получены редукцией по некоторой группе, действующей сопряжениями. Изучая действие этой группы, можно будет также восстановить гамильтонианы, упомянутые в предыдущем пункте "из геометрических соображений". В-третьих, мы изучаем комбинаторные структуры двудольных графов на поверхностях, двойственных к тору, определяющую кластерную интегрируемую систему и то, как они меняются при описанных выше преобразованиях. Уже сейчас ясно, что найденные преобразования являются естественным обобщением так называемых "spider move"-преобразований до мутаций в гранях, окружённых более чем 4мя рёбрами.
- Совместно с П. Гавриленко, А.Ляшиком, А. Маршаковым и И. Моториным мы изучаем класс интегрируемых систем, интерполирующий между A, B, C и D цепочками Тоды. Мы обнаружили, что как K-матрицы для таких систем так и их дискретные потоки в некоторых случаях могут быть естественно описаны в терминах кластерных алгебр. Моим вкладом в это исследование является описание гамильтонианов системы типа D, соответствующих спинорным представлениям, в терминах кластерных переменных и планарных сетей, а также построение её K-матрицы в этих терминах.

В прошедшем году я принял участие в работе над записками лекций по квантовым группам, написанных по мотивам лекций, прочитанных П. Этинггофом. Записки опубликованы в системе arXiv [MS]. Также я посетил две школы в качестве участника:

- Школа-конференция по теории струн, интегрируемым системам и теории представлений, онлайн.
- Школа "Пуассонова геометрия и теория представлений", онлайн.

На школе “Cluster Algebras and Moduli Spaces”, Сириус, Сочи, я прочёл мини-курс “Cluster integrable systems”. Также я был членом организационного комитета “3й весенней школы по математике и физике”, которая прошла онлайн. В весеннем семестре я был учебным ассистентом А. А. Рослого на курсе “Калибровочные теории и комплексная геометрия”.

References

[MS] P. Etingof, M. Semenyakin, *A brief introduction to quantum groups*, [arXiv:2106.05252].