

Демидович Юрий Александрович: краткое изложение заявки

Я занимаюсь задачами о раскрасках в теории графов и гиперграфов. Преимущественно меня интересуют фундаментальные вопросы о поиске хроматических чисел графов и гиперграфов (первое направление) и связанные с ними экстремальные комбинаторные задачи (второе направление).

Проведенные исследования. Задачей о поиске хроматического числа случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ и случайного графа $G(n, p) = H(n, 2, p)$ занимались такие классики, как Эрдеш, Боллобаш, Лучак, Алон, Спенсер. Одним из важнейших результатов о хроматическом числе случайного графа является теорема Лучака, которая утверждает, что при не слишком медленном убывании $p = p(n)$ хроматическое число $G(n, p)$ с вероятностью, стремящейся к единице, сконцентрировано в некоторых двух соседних значениях. Однако ее доказательство не позволяет найти их явным образом. В проведенном исследовании было изучено асимптотическое поведение хроматического числа случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ при фиксированном $k \geq 4$, стремящемся к бесконечности n и некоторой функции $p = p(n)$. Доказано, что лишь в промежутке ограниченной длины хроматическое число сконцентрировано в трех последовательных числах, а во всех остальных случаях — в двух. Доказательство позволяет найти их явно.

Будущие исследования.

1). В 1980 году в классической работе Боллобаша была предложена модель случайного графа, которая называется конфигурационной моделью. Ее исследовали Янсон, Кривелевич, Судаков, Ван дер Хофштадт и другие ведущие математики. На семинаре получена асимптотика хроматического числа конфигурационной модели случайного графа. Данный результат будет обобщен на некоторые другие похожие одноранговые модели, и будет сформулирована общая теорема.

2). Кликовой раскраской графа называют раскраску множества его вершин, при которой в графе отсутствуют одноцветные максимальные по включению клики за исключением изолированных вершин. Клико-хроматическим числом $\chi_c(G)$ графа G называется минимально возможное число цветов в такой раскраске. Было проведено много исследований для данной величины в случае обычных графов. Недавно Алоном, Кривелевичем, МакДармидом, Пралатом и Митше были получены оценки для клико-хроматического числа случайного графа $G(n, p)$. Заявитель планирует обобщить их методы на случайные гиперграфы.

3). Независимо друг от друга Визинг в 1976 году и Эрдеш, Рубин и Тэйлор в 1979 году положили начало изучению такой величины, как предписанное хроматическое число графа. По аналогии можно ввести понятие предписанного клико-хроматического числа $ch_c(G)$ для случайного графа $G(n, p)$. А именно, будем говорить, что граф является предписанно r -раскрашиваемым, если независимо от способа распределения r цветов для каждой вершины ни одна максимальная по включению клика за исключением изолированных вершин не является одноцветной. Заявитель планирует изучить асимптотическое поведение предписанного клико-хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ в неразрезанном и разреженном случаях.

Проведенные исследования. Гиперграф H обладает свойством B_k , если существует такая раскраска множества V в два цвета, что в каждом ребре содержится по крайней мере k вершин каждого цвета. Обозначим через $m_k(n)$ величину, равную минимальному числу ребер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов, не обладающих свойством B_k . Проблеме поиска асимптотического выражения для данной величины посвящены работы таких математиков, как Эрдеш, Радхакришнан, Сринивасан, Шабанов, Черкашин, Козик и многих других. Заявителю удалось обобщить известную нижнюю оценку Радхакришнана и Сринивасана, полученную ими для свойства B_1 , и улучшить предыдущие нижние оценки для остальных значений k . Однако, хоть эти оценки и являются наилучшими, они представляются далекими от оптимальных. Зазор между верхними оценками, полученными Эрдешем для $k = 1$ и Шабановым для других k , и полученными заявителем нижними по-прежнему велик.

В классе простых гиперграфов (любые два ребра имеют не более одной общей вершины) результаты можно улучшить, а именно, речь идет о поиске величины $m_k^*(n)$. Задача была поставлена Эрдешем и Ловасом, впоследствии данным вопросом занимались ведущие современные специалисты в области экстремальной комбинаторики и теории графов, как Косточка, Редль, Шабанов, Козик. Заявителем был получен ряд результатов, среди которых как наилучшие нижние, так и наилучшие верхние оценки для данной величины при $k \geq 2$.

Будущие исследования. Между полученными верхними и нижними оценками для величин $m_k^*(n)$ присутствует зазор. Планируется усилить полученные ранее нижние оценки для $k \geq 2$, обобщив рандомизированный алгоритм перекраски Шабанова и Козика для $k = 1$.