Обобщение краевой задачи Римана

Д.Б. Кац

Проект посвящен обобщению теории краевой задачи Римана и получению целого ряда смежных результатов.

Краевая задача Римана - задача об отыскании аналитиеской в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, которые имеют в точках $t \in \Gamma$ предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ при z стремящемся к t из областей D^+ и D^- соответственно, и эти предельные значения связаны краевым условием

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \tag{1}$$

при любом $t \in \Gamma$. Здесь $G(t)$ и $g(t)$ – заданные на Γ функции, кривая Γ на комплексной плоскости разбивает эту плокость на области D^+ и D^-, причем бесконечно удаленная точка лежит внутри второй из них

Соискатель получил ряд результатов по краевой задаче Римана на неспрямляемой кривой с применением введенного им обобщенного интегрирования и построенной им метрической характеристики кривой - показателей Марцинкевича.

К сожалению, показатели Марцинкевича носят геометрический характер и поэтому дают не лучшие результаты в особенностей на концах кривой или дуги специфической геометрии. Переопределение показателей Марцинкевича для таких случаев или введение новых метрических характеристик позволит устранить этот изъян.

Другие важное направление исследования подразумевает поиск аналога известного результата В.П. Хавина:

Пусть Γ – ограниченное, замкнутое и связное множество (континуум) на комплексной плоскости, μ – существенная мера[1], заданная на подмножествах Γ, $G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{\Gamma}$. Тогда любая аналитическая в G функция $\Phi(z)$ представима в виде

$$\Phi(z) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Gamma} \frac{Y_k(t)\, d\mu}{(t-z)^{k+1}}, \tag{2}$$

где функции Y_k таковы, что $\|Y_k\|^2 := \int\limits_{\Gamma} |Y_k(t)|^2 d\mu < \infty$ при любом k, и $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|Y_k\|} = 0$.

Следует получить такое представление для интеграла типа Коши по неспрямляемому контуру Γ, то есть выразить функции $Y_1, Y_2, \ldots$ через характеристики контура Γ, меру μ и функцию $f(t)$.

Также представляет интерес вопрос о том, при каких условиях можно утверждать, что значения интегрирования определяются значениями ω лишь на самом контуре, а не в его окрестности?

Еще один важный вопрос - вопрос о емкости. Интересно выяснить, что происходит, если

$f \in H_\nu(\Gamma)$, $\quad \frac{1}{2}\Gamma \geq \nu > \Gamma{-}1$, или $f \in H_\nu(\Gamma)$, $\quad 1{-}\frac{1}{2}(\Gamma;t) \geq \nu > 1{-}(\Gamma;t)$. Из наших результатов следует, что при этом интеграл типа Коши существует, но предельных значений во всех точках кривой, вообще говоря, не имеет. Наша гипотеза состоит в том, что при этом такие предельные значения существуют квазивсюду, то есть всюду за исключением некоторого множества $E \subset \Gamma$ нулевой емкости; при этом размерность этой емкости может зависеть от ν и метрических характеристик кривой. Хотелось бы проверить это.

Решение этих вопросов, а также применение альтернативных метрических характеристик - таких как размерность Ассуада, Аикавы, спектр Фрезера–Ю - позволит построить единую теорию краевой задачи Римана и получить семейство серьезных актуальных результатов.

[1] мера называется существенной, если из $E \subset \Gamma$, $\mu(E) = 0$ следует $\overline{\Gamma \setminus E} = \Gamma$.