

Краткое изложение заявки (Кузнецова М.Н.)

В рамках проекта я планирую заниматься классификацией и исследованием интегрируемых цепочек типа двумеризованной цепочки Тоды $u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y})$.

Уравнения с тремя независимыми переменными являются сложными объектами для исследования и особенно для классификации. На сегодняшний день существуют различные подходы для исследования интегрируемых многомерных уравнений. Часто при исследовании многомерных уравнений используется факт того, что существование широкого класса интегрируемых редукций указывает на интегрируемость самого уравнения. В работе [1] было предложено в качестве признака интегрируемости рассматривать существование редукций цепочки к системе гиперболических уравнений произвольно высокого порядка, интегрируемых в смысле Дарбу. В совместных работах с И.Т. Хабибуллиным [2, 3] мы проверили эту гипотезу, применив к указанной выше нелинейной цепочке. В этих работах была проведена классификация квазилинейных цепочек. Интегрируемость редукций в смысле Дарбу устанавливалась на основе критерия: алгебры Ли-Райнхарта по обоим характеристическим направлениям, соответствующие конечной системе гиперболических уравнений, полученной в результате редукции, должны иметь конечную размерность. В моей работе [4] проведена классификация другого подкласса цепочек. В работе [5] получены необходимые условия интегрируемости для цепочек, правая часть которых не содержит производные $u_{n,x}, u_{n,y}$. В работе [6] была проведена классификация интегрируемых уравнений специального вида при помощи нового метода, объединившего геометрический подход [7] и подход, основанный на исследовании интегрируемых в смысле Дарбу редукций.

Характеристическая алгебра Ли для двумеризованных цепочек была введена в работе А.Б.Шабата [8]. Это был первый пример характеристической алгебры Ли для уравнения с тремя независимыми переменными.

В перспективе планируется заниматься обобщением метода характеристических алгебр и Дарбу интегрируемых редукций на другие классы уравнений с тремя независимыми переменными. Важно отметить, что Дарбу интегрируемые редукции дают метод классификации с одной стороны, с другой стороны дают метод построения частных решений. При этом можно строить новые решения, которые по-видимому не относятся к классу конечнозонных.

Проблема общей классификации двумеризованных цепочек в настоящее время остается открытой. В рамках данного проекта я планирую решить следующие задачи:

1. Построить пару Лакса для цепочки (которая по-видимому является новой), полученной в результате классификации в работе [3]. Построить пару Лакса в периодически замкнутом случае $u_n = u_{n+3}$. Доказать, что периодически замкнутая цепочка допускает высшие симметрии.

2. Исследовать и провести классификацию интегрируемых цепочек, не являющихся квазилинейными. В частности, будет исследован подкласс с квадратичной зависимостью от производных $u_{n,x}, u_{n,y}$.

[1] I.T. Habibullin, *Physica Scripta* **87**:6 (2013), 065005.

[2] I. T. Habibullin, M. N. Kuznetsova, *Theor. Math. Phys.*, **203**:1 (2020) 569–581.

[3] I. Habibullin, M. Poptsova(Kuznetsova), *SIGMA* **13**:073 (2017) 26 pp.

[4] M.N. Kuznetsova, *Ufa Math. J.* **11**:3 (2019) 109–131.

[5] I.T. Habibullin, M.N. Kuznetsova, A.U. Sakieva, *J. Phys. A: Math. Theor.* **53**:39 (2020), 395203

[6] E. V. Ferapontov, I. T. Habibullin, M. N. Kuznetsova, V. S. Novikov, *J. Math. Phys.* **61**:7 (2020), 073505

[7] E.V. Ferapontov, B.S. Kruglikov, *J. Diff. Geom.* **97** (2014) 215–254.

[8] A.B. Shabat. *Phys. Lett. A* **200**:2 (1995) 121–133.