Медведев Владимир Олегович

Краткое изложение заявки

Спектральная геометрия - раздел геометрического анализа, довольно молодой науки, изучающей взаимосвязь геометрии, топологии и анализа на многообразии. Основным объектом изучения спектральной геометрии является спектр некоторого глобально определённого (с помощью римановой метрики) оператора. Пожалуй, самым важным оператором в римановой геометрии является оператор *Лапласа-Бельтрами*, или просто *Лапласиан*. В случае замкнутого риманова многообразия спектр Лапласиана - набор неотрицательных собственных значений с кратностями. Наряду с геодезическим, спектр является естественным инвариантом риманова многообразия. Более того, спектр тесно связан с теорией *минимальных подмногообразий*. Напомним, что многообразие называется минимальным, если оно является критической точкой функционала объёма. Теория минимальных подмногообразий в настоящее время далека от своего завершения даже в простейших случаях. Примечательно, что в случае сфер с круглой метрикой эта задача напрямую связана со спектром Лапласиана. Поясним. Рассмотрим все метрики на данном компактном многообразии фиксированного объёма (например, положим его равным 1). Оказывается, что корректно поставить вопрос о *максимальных метриках* (так мы будем называть метрики, для которых одно из собственных значений достигает максимума). Фундаментальная теорема спектральной геометрии утверждает, что максимальные метрики индуцированы с минимальных погружений в сферы с круглой метрикой. В настоящее время ведётся их интенсивное изучение. Мой вклад заключается в изучении максимальных метрик для первого собственного числа на торе и бутылке Клейна. Мной и моими соавтарами Д.Чьянчи и М.Карпухиным был дан окончательный ответ на вопрос о максимальных метриках для первого собственного числа на торе и бутылке Клейна.

Любопытны приложения спектральной геометрии к конформной геометрии. По каждому конформному классу на данном компактном многообразии спектр Лапласиана позволяет построить серию инвариантов, определённых как взятие супремума какого-то собственного значения по всем метрикам одного объёма из этого конформного класса. Эти инварианты называются конформным спектром. Изучение конформного спектра тесно связано с теорией *гармонических отображений* в круглые сферы. Напомним, что отображение двух римановых многообразий называется гармоническим, если оно является критической точкой функционала энергии. В соавторстве с Д.Чьянчи и М.Карпухиным нам удалось классифицировать конформные классы по наличию в них метрик, индуцированных с минимального разветвлённого погружения первыми собственными функциями в круглые сферы. Это обобщение известного результата Монтьеля и Роса, полученного ими для неразветвлённых погружений первыми собственными функциями.

Спектр позволяет строить новые топологические инварианты. Одним из таких инвариантов является *инвариант Надирашвили-Фридлендера*, определяемый как инфимум какого-то конформного собственного числа по всем конформным классам на данном многообразии. Интерес к этим инвариантам возник сразу же после их введения Надирашвили и Фридлендером. Долгое время изучался лишь первый инвариант на поверхностях. В отношении этого инварианты была выдвинута гипотеза о том, что первый инвариант Надирашвили-Фридлендера всякой поверхности, недиффеоморфной проективной плоскости равен первому инварианту Надирашвили-Фридлендера на сфере. Ошибочность этой гипотезы была доказана в нашей статье с М.Карпухиным, где были изучены *все* инварианты Надирашвили-Фридлендера на поверхностях. Там же высказалось прдеположение, что инварианты Надирашвили-Фридлендера являются инвариантами *кобордизмов*. Работа над доказательством этой гипотезы ведётся нами в настоящее время.

Другой областью интересов спектральной геометрии является спектр оператора Лапласа специальных метрик, таких как Эйнштейновы и Кэлеровы метрики. Интригующими являются результаты последних лет о том, что спектр проективного замкнутого многообразия ограничен в каждом кэлеровом классе. Интересно изучить аналоги инвариантов Надирашвили-Фридлендера для таких многообразий и выяснить, инвариантами какой топологической структуры они являются.

В последнее время возрастает интерес к изучению *задачи Стеклова* на римановых поверхностях с краем. Сформулировать её можно следующим образом. На данной компактной поверхности с краем рассматриваются все гармонические функции. Среди них мы будем искать те функции, которые пропорциональны своей нормальной производной вдоль границы. Оказывается, что коэффициенты пропорциональности всегда неотрицательны и представляют собой набор чисел с конечными кратностями. Эти числа мы будем называть *спектром Стеклова*. Это естественный инвариант римановой поверхности с краем. Спектр Стеклова обладает весьма похожими на спектр замкнутого многообразия свойствами. Аналогичным образом определяется понятие максимальной метрики для собственного числа Стеклова (только теперь мы будем рассматривать метрики данной фиксированной длины границы, например, положим её равной 1). Выясняется, что Стекловские максимальные метрики индуцированы с минимальных погружений в евклидовы шары так, что при этом погружении граница нашей поверхности ортогональна границе шара. Совсем недавно стало известно, что всякая поверхность с краем может быть реализована таким образом. В настоящее время вопрос о максимальных метриках изучен лишь для первого собственного числа Стеклова на цилиндре и ленте Мёбиуса, а также для всех чисел Стеклова на круге. Мой вклад заключается в исследовании конформного спектра Стеклова, определяемого по аналогии с конформным спектром Лапласиана. В своей статье я также изучил аналог инвариантов Надирашвили-Фридлендера для спектра Стеклова. Это новые топологические инварианты поверхностей с краем. Оказывается, что в отличие от замкнутой задачи, можно показать, что эти инварианты являются инвариантами *кобордизмов поверхностей с краем*. В настоящее время мною ведётся работа над теоремами жёсткости для конформного спектра Стеклова.