

# Краткое изложение заявки “Линейно-алгебраические и комбинаторные методы в дискретной и выпуклой геометрии”

Александр Полянский

В 1932 году Тарский изящно доказал, что сумма ширин полосок (выпуклая оболочка двух параллельных прямых), покрывающих круг, не меньше его диаметра. В 1950-е Банг обобщил это утверждение на случай выпуклого тела в евклидовом пространстве и выдвинул сложную гипотезу: *Если выпуклое тело покрыто полосками, то их суммарная относительная ширина (отношение ширины полоски к ширине выпуклого тела в направлении полоски) не меньше 1*. Эта гипотеза была доказана Боллом в случае центрально-симметричных выпуклых тел. В 1973 году Фейеш Тот сформулировал аналогичную гипотезу о покрытии сферы зонами (пересечение сферы с симметричной относительно центра сферы полоской). Эта гипотеза оставалась открытой до 2017 года, пока автор проекта совместно с Цзяном её не доказали. Мы планируем продолжить исследования в этом направлении, в частности, доказать усиленные версии гипотезы Фейеша Тота, а также упростить доказательство Болла.

Есть большой класс дистанционных задач дискретной геометрии рамсеевского и турановского типа, которые в разные годы изучались Алоном, Барань, Грюнбаумом, Калаи, Пахом, Эрдемем и многими другими. К этим задачам можно отнести и исследования автора проекта, связанные с оценкой числа больших клик в графах диаметров, а также мощность подмножеств евклидова пространства, в котором среди любых трех точек есть две на заданном расстоянии. Автор проекта придумал и использовал несколько линейно-алгебраических подходов для доказательства строгих дистанционных неравенств, играющих важную роль в таких задачах. Одна из целей проекта — усовершенствовать эти методы. Примером такого неравенства является гипотеза Акопяна и Карасева: *У каждого из двух комбинаторно эквивалентных (но не конгруэнтных) многогранников в евклидовом пространстве, вписанных в единичную сферу, найдётся ребро, которое больше соответствующего ребра в другом многограннике*. Автору недавно удалось опровергнуть эту гипотезу, поэтому сейчас стоит вопрос о том, как ‘сохранить’ гипотезу, потребовав дополнительные ограничения на многогранники.

Одним из важных объектов исследования в дискретной геометрии, спектральной теории графов и теории кодирования являются *равноугольные прямые*, то есть такие прямые в евклидовом пространстве, что углы между любыми двумя из них равны. Есть две классические постановки вопроса о максимальном количестве равноугольных прямых. В первой предполагается, что угол между прямыми не фиксируется, а во второй наоборот угол между прямыми фиксируется, а размерность устремляется к бесконечности. Известно, что ответ на первый вопрос зависит квадратично от размерности, а на второй — линейно. Эти задачи изучались в работах Дельсарта, Буха, Киваша, Судакова и многих другие. Автору проекта совместно с Цзяном удалось получить ряд результатов в контексте второй постановки, применяя методы спектральной теории графов, например, теорему Алона–Бошпана о втором собственном значении матрицы инцидентности регулярных графов. В будущем мы планируем продолжить исследования аналогичных задач для множеств с малым числом расстояний, а также доказать некоторые обобщения теоремы Алона–Бошпана для взвешенных графов.