ФУНКЦИЯ ЭНТРОПИИ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЗАЯВКИ

Р.В. БЕССОНОВ

Рассмотрим борелевскую меру μ на вещественной прямой $\mathbb{R}$, такую, что $(x^2+1)^{-1} \in L^1(\mu)$. Пусть $\mu = w\,dx + \mu_{\mathbf{s}}$ – ее разложение на абсолютно непрерывную и сингулярные части. Говорят, что мера μ лежит в классе Сеге $\mathrm{Sz}(\mathbb{R})$, если конечен ее логарифмический интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log w(x)}{1+x^2}\,dx > -\infty. \tag{1}$$

Основной объект изучения настоящего проекта – самосопряженные дифференциальные операторы, спектральные меры которых скалярны и попадают в класс Сеге $\mathrm{Sz}(\mathbb{R})$. К примерам таких операторов относятся операторы Шредингера, Дирака, оператор струны Крейна, канонические гамильтовы системы, матрицы Якоби. Класс Сеге при их изучении естественным образом возникает в следующих областях:

- Обратные спектральные задачи
- Теория рассеяния
- Треугольная факторизация операторов Винера-Хопфа
- Спектральная теория, связанная со стационарными гауссовскими процессами

Автор заявки получил ряд результатов в указанных областях: решение обратной задачи для оператора струны Крейна, критерий существования волновых операторов для системы Дирака, факторизуемость положительных обратимых операторов Винера-Хопфа, описание канонических систем, спектральные меры которых отвечают недетерминистским гауссовским процессам. Большинство результатов получено в совместных работах с С.А.Денисовым (Висконсинский университет в Мэдисоне). Помимо доказательства новых теорем в уже перечисленных областях, планируется уделить внимание двум разделам спектральной теории, в которых основной инструмент исследований автора заявки (функция энтропии спектральной меры) ранее не применялся:

- Метод обратной задачи рассеяния для нелинейного уравнения Шредингера
- Свойства резонансов операторов Дирака и Шредингера

Общая философия развиваемого подхода состоит в систематическом использовании идей теории ортогональных многочленов на единичной окружности. В частности, автором проекта активно используется функция энтропии спектральной меры,

$$\mathcal{K}(\mu,z) = \log\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Im} z}{|z-x|^2}\,d\mu(x)\right) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \log w(x)\frac{\operatorname{Im} z}{|z-x|^2}\,dx, \qquad \operatorname{Im} z > 0, \tag{2}$$

оказывающаяся удивительно удобным инструментом в самых разных задачах. Ее ближайший "родственник" в теории ортогональных многочленов, вокруг которого построена теория Г.Сеге – логарифмический интеграл веса на единичной окружности. Использование идей теории ортогональных многочленов в спектральных задачах было предложено М. Г. Крейном еще в 1950х годах. С течением времени эта техника превратилась в целую теорию, результаты которой до 2006г. можно найти в статье С. А. Денисова. В последние два десятилетия благодаря исследованиям Б. Саймона и его соавторов связи спектральной теории и теории ортогональных многочленов стали еще более сильными. Можно рассматривать второй том его известной монографии как результаты переосмысления спектральной теории с новых позиций. Реализация предполагаемого проекта позволит существенно продвинуться в этом направлении.

Ключевые слова: *система Дирака, уравнение струны, канонические гамильтоновы системы, ортогональные многочлены, обратные задачи, теория рассеяния, волновые операторы, энтропия, резонансы, нелинейное уравнение Шредингера.*