Автоморфизмы многообразий с действием тора

СЕРГЕЙ ГАЙФУЛЛИН

ключевые слова: аффинное алгебраическое многообразие, автоморфизм, действие тора, локально нильпотентное дифференцирование

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и X – аффинное алгебраическое многообразие над $\mathbb{K}$. Мы изучаем группу $\mathrm{Aut}(X)$ регулярных автоморфизмов данного многообразия. Для произвольного многообразия X эта проблема выглядит слишком общей и потому неразрешимой. Поэтому мы ограничимся случаем, когда X допускает нетривиальное действие достаточно большого алгебраического тора.

Если размерность тора на 1 меньше, чем размерность многообразия, мы получаем многообразие с действием тора сложности 1. Такие многообразия тесно связаны с триномиальными многообразиями. В рамках этого проекта мы планируем изучить следующие вопросы, связанные с триномиальными многообразиями:

- Получить критерий гибкости триномиального многообразия.
- Описать группу автоморфизмов жёсткого триномиального многообразия (а не только гиперповерхности).
- Описать все LND однородные относительно самой тонкой свободной градуировки. (Эта градуировка соответствует T-действию). Это более сложная задача, чем описание LND однородных относительно самой тонкой градуировки. Но решение этой задачи будет полезнее, так как для свободной градуировки любое LND раскладывается в сумму однородных дифференцирований. И дифференцирования, со степенями – вершинами выпуклой оболочки всех степеней являются однородными LND.
- Рассмотреть k-номы, которые являются естественным обобщением триномов и изучить k-номиальные гиперповерхности и k-номиальные многообразия подобным образом к тому, как изучены триномиальные.
- Для негибких триномиальных многообразий мы планируем выяснить, есть ли бесконечная транзитивность $\mathrm{Aut}(X)$-действия на типичной орбите.

В недавней работе Боровик-Гайфуллина-Шафаревича описаны $\mathrm{Aut}(X)$-орбиты для S-многообразий. Для того, чтобы это сделать нам понадобились две техники: первая позволяет склеивать G-орбиты, входящие в одну $\mathrm{Aut}(X)$-орбиту, а вторая разделяет G-орбиты из разных $\mathrm{Aut}(X)$-орбит. Первая техника основана на упомянутых выше $\mathbb{G}_a$-действиях. В качестве второй техники был разработан алгебраический аргумент в терминах весового конуса, который даёт препятствие на то, чтобы две G-орбиты склеивались. Он основан на следующей идее. Если мы имеем LND, оно может быть разложено в сумму $\mathfrak{X}(T)$-однородных дифференцирований. Дифференцирования, соответствующие степеням, являющимся вершинами выпуклой оболочки всех степеней, являются локально нильпотентными. Таким образом, если мы знаем степени $\mathfrak{X}(T)$-однородных LND, то мы можем контролироватьвыпуклую оболочку степеней всех слагаемых. В рамках данного проекта мы планируем исследовать, для какого максимально широкого класса многообразий эти две техники позволяют описать все $\mathrm{Aut}(X)$-орбиты. Заметим, что для S-многообразий $\mathrm{Aut}(X)$-орбиты совпали с орбитами нормалитзатора $N_{\mathrm{Aut}(X)}(T)$ тора T. Планируется получить необходимое и достаточное условие на T-действие на X, при котором $N_{\mathrm{Aut}(X)}(T)$-орбиты совпадают с $\mathrm{Aut}(X)$-орбитами.

Также планируется изучать градуированные автоморфизмы полиномиальных алгебр. В рамках данного проекта мы планируем изучить следующие вопросы.

- Для различных градуировок алгебр многочленов выяснить, существуют ли градуированно дикие автоморфизмы.
- Если для градуировки есть градуированно дикий автоморфизм, есть ли структура амальгамированного произведения у группы градуированных автоморфизмов?
- Если для градуировки есть градуированно дикий автоморфизм, есть ли алгоритм, проверяющий, данный автоморфизм градуированно ручной или градуированно дикий?
- Описать нормализатор$N_{\mathrm{Aut}(X)}(T)$ и централизатор $C_{\mathrm{Aut}(X)}(T)$ для конкретных торов $T \subset \mathrm{Aut}(X)$, где X – это торическое многообразие или многообразие с действием тора сложности 1.

Боровик и Гайфуллин изучили, как меняется группа автоморфизмов жёсткого многообразия, если заменить во всех уравнениях, задающих данное многообразие, одну переменную на некоторый фиксированный моном. Эта конструкция получила название m-надстройки. Основная техническая идея этой работы заключена в том, что m-надстройка допускает действие тора и это действие позволяет контролировать группу автоморфизмов. В рамках этого проекта планируется обобщить данный результат на случай не жёсткого многообразия. Например, на случай почти жёсткого многообразия, то есть многообразия, у которого для всех LND алгебры $\mathbb{K}[X]$ совпадают ядра. Гайфуллин описал группу автоморфизмов многообразий Данилевского. Эти многообразия являются почти жёсткими и имеют структуру m-надстроек. Они интересны так как являются контр примером к обобщённой гипотезе сокращения Зарисского. Планируется изучить группу автоморфизмов у произвольной почти жёсткой m-надстройки.