

Рябичев Андрей Дмитриевич

## $h$ -принцип и глобальная теория особенностей

### 1 Полученные результаты

Пусть даны два многообразия  $M$  и  $N$ , имеющие размерности  $m$  и  $n$  соответственно. Предположим, мы также имеем замкнутое подмножество  $S \subset M$ , открытое покрытие  $S \subset \bigcup U_i$  и набор локально  $L$ -эквивалентных отображений  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ , где  $V_i$  суть многообразия размерности  $n$ , причём  $S$  является объединением их критических точек. Будем называть такой набор данных *заданными особенностями*.

Мы решаем задачу: *когда существует отображение  $f : M \rightarrow N$ , имеющее заданные особенности (с точностью до локальной  $L$ -эквивалентности в каждой точке)?*

Оказывается, что искать отображение  $f$  гораздо удобнее не среди всех отображений  $M \rightarrow N$ , а в фиксированном гомотопическом классе. Также мы ограничиваемся случаем, когда  $\varphi_i$  имеют лишь особенности *общего положения*.

А именно, рассмотрим разбиение пространства струй на многообразия Бордмана  $J^m(M, N) = \bigcup \Sigma^I(M, N)$ , см. [1], [7]. Известно, что это разбиение не является регулярной стратификацией в смысле Уитни, см. [3], [6]. В статье [5] я описываю естественную процедуру, как это исправить. Новое доказательство нижеследующей теоремы, а также другие улучшения текста [5] перед подачей в журнал, и являются основными готовыми результатами моей работы за последний год.

**Теорема 1.** *Существует измельчение разбиения Бордмана  $\bigcup \Sigma^I(M, N)$ , являющееся стратификацией  $J^m(M, N)$ .*

Измельчение, которое я строю, автоматически оказывается минимальным. Кроме того, оно является в некотором смысле естественным (например, оно наследуется при вложении  $J^m(M, N) \rightarrow J^m(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$  и ограничениях  $J^m(U, V) \subset J^m(M, N)$  для открытых подмножеств  $U \subset M$  и  $V \subset N$ ). Мы говорим, что гладкое отображение находится в *общем положении*, если его  $m$ -струйное расширение трансверсально всем стратам (здесь мы берём  $m$  в качестве порядка струи из соображений размерности). Отсюда, множество критических точек общего отображения — стратифицированное подмножество в  $M$ .

В случае  $m = n$  задача гомотопности непрерывного отображения  $f : M \rightarrow N$  отображению с заданными особенностями сводится к вопросу об изоморфизме векторных расслоений  $f^*(TN)$  и  $T^{\{\varphi_i\}}M$  над  $M$ , см. [5]. Здесь расслоение  $T^{\{\varphi_i\}}M$  получается из  $TM$  некоторой переклейкой над  $S$ . Эти переклейки описаны мною явно в [4] при  $n = 2$  и в [5] при  $n = 3$ . Ближайшая цель — попробовать дать в общем случае описание переклеек, позволяющее вычислить характеристические классы  $T^{\{\varphi_i\}}M$ . Возможно, полученная стратификация пространства струй отвечает топологический эквивалентности особых ростков, см. [2], в таком случае каждому страту  $S$  должен отвечать свой тип переклейки.

### 2 Опубликованные работы

- Maps of manifolds of the same dimension with prescribed Thom-Boardman singularities arXiv:1810.10990, *подана в Journal of the London Mathematical Society*

### 3 Доклады на конференциях и семинарах

- 9-я Международная молодежная летняя школа-конференция по геометрическим методам математической физики, 5–10 июля 2022, Красновидово.  
Доклад “Отображения многообразий с заданными особенностями”
- Семинар по геометрической топологии, МИАН/Матфак ВШЭ.  
Доклад “Стратификация многообразий Бордмана”

### 4 Педагогическая деятельность

В весеннем семестре 2021 и осеннем семестре 2022 я прочитал два спецкурса в НМУ по темам, связанным со своим проектом, и один курс на ЛШСМ. Кроме того, я участвовал в организации ещё нескольких научно-образовательных мероприятий. Полный список:

- *Мягкие задачи в дифференциальной геометрии.*  
Спецкурс в НМУ, весна 2022.
- *Элементы геометрической и дифференциальной топологии.*  
Спецкурс в НМУ, осень 2022.
- *Феномен мягкости в дифференциальной топологии.*  
Курс на XXI Летней школе «Современная математика», 19–30 июля 2022, Дубна.
- *Погружения многообразий.*  
Доклад в рамках научно-популярной конференции *Dark geometry fest* по геометрическим методам и приложениям, 16–17 июля 2022, Москва, культурный центр ЗИЛ.
- *Мини-курс по маломерной топологии.*  
Серия из 4 лекций в рамках мини-курса, организованного мной и моими товарищами в Воронеже, 25-26 октября, ВГУ.
- *Геометрические прогулки.*  
Серия из 4 популярных лекций на свежем воздухе, затрагивающих различные сюжеты из дифференциальной топологии (многообразия, циклы, расслоения,  $PL$ -структуры, римановы поверхности, пространства модулей), июль–октябрь 2022, Москва.

Также я работаю в московской школе № 179 — среди прочего, являюсь там куратором двух 9 математических классов и составляю в них задания для матпрактикума, руковожу несколькими проектами по математическим темам у школьников из разных 9-10 классов, а также веду школьный научный семинар «Кружочек».

В 2021-22 учебном году я был научным руководителем Амира Исмаилова (1 курс матфака ВШЭ, тема “Полиномиальный алгоритм распознавания вложимости графа в плоскость”). В 2022-23 учебном году я стал руководителем двух студентов — Фёдора Дьяконова (1 курс матфака ВШЭ) и Олега Гридунова (3 курс матфака ВШЭ), у обоих из них темы связаны с топологией трёхмерных многообразий и гомологическими сферами, на данный момент на стадии разработки.

## Список литературы

- [1] J. M. Boardman, Singularities of differentiable maps. IHES Publ. Math., 33 (1967), 21–57.
- [2] C. G. Gibson, K. Wirthmuller, A. A. du Plessis, E. J. N. Looijenga, Topological Stability of Smooth Mappings. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552, 1976.
- [3] M. Goresky, R. MacPherson, Stratified Morse theory. Springer-Verlag, 1988.
- [4] A. Ryabichev, Eliashberg's  $h$ -principle and generic maps of surfaces with prescribed singular locus. Topology and its Applications, vol. 276 (2020). DOI: 10.1016/j.topol.2020.107168
- [5] A. Ryabichev, Maps of manifolds of the same dimension with prescribed Thom-Boardman singularities. arXiv:1810.10990
- [6] D. Trotman, Stratification theory. Cisneros-Molina José Luis, Dũng Tráng Lê, Seade José (Eds.). Handbook of Geometry and Topology of Singularities I, 2020. hal-03186972
- [7] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, Особенности дифференцируемых отображений, Том 1, Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
- [8] Я. М. Элиашберг, Об особенностях типа складки. Изв. АН СССР. Сер. матем., 34:5 (1970), 1110–1126.