Отчет по гранту
«Молодая математика России»
за 2022 год

ФИО участника: **Жуйков Константин Николаевич**.

Название проекта: **Эта-инварианты, ассоциированные с действиями групп, и их приложения к задачам об индексе**.

Ключевые слова: *эллиптический оператор, оператор со сдвигами, оператор с параметром, эта-инвариант, индекс.*

1 Полученные результаты.

1.1 Индекс дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре

Настоящая работа посвящена проблеме индекса эллиптических дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре. Вводится понятие символа рассматриваемых операторов и напоминаются условия, гарантирующие фредгольмовость рассматриваемых операторов. Далее вводятся вспомогательные определения и конструкции (в частности, модификация η-инварианта из статьи [2]), в терминах которых формулируется теорема об индексе — основной результат работы.

Результаты работы опубликованы в статье [1].

На цилиндре $M = \mathbb{S}^1_x \times \mathbb{R}_t$ с координатами (x,t) рассматриваются операторы вида

$$D = \sum_k D_k(x,t,-i\partial_x,-i\partial_t)T^k \colon H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M,\mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-m,\gamma^-,\gamma^+}(M,\mathbb{C}^N), \tag{1.1}$$

где $D_k(x,t,-i\partial_x,-i\partial_t)$ — матричный дифференциальный оператор порядка $\leqslant m$ на M, $\partial_x = \partial/\partial x$, $T^k u(x,t) = u(x,t-2\pi k)$ — оператор сдвига по переменной t, а $H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M)$ — весовое пространство Соболева. При этом мы предполагаем, что только конечное число слагаемых в сумме (1.1) не равно нулю, а коэффициенты оператора D_k не зависят от t при больших значениях $|t|$.

Определение 1.1. *Внутренним символом* оператора (1.1) в точке $(x,t,\xi,p) \in T^*_0 M = \{(x,t,\xi,p) \mid \xi^2 + p^2 \neq 0\}$ кокасательного расслоения без нулевого сечения называется оператор

$$\sigma(D)(x,t,\xi,p) = \sum_k \sigma(D_k)(x,t+2\pi n,\xi,p)\mathcal{T}^k \colon \ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N, \tag{1.2}$$

где $\sigma(D_k)$ — главный символ оператора D_k, $\mathcal{T}w(n) = w(n-1)$ — оператор сдвига последовательности. Наконец

$$\ell^2(\mathbb{Z},\mu) = \left\{ w(n) \,\Big|\, \sum_n |w(n)|^2\mu(n) < \infty \right\}, \text{ где вес } \mu(n) = \begin{cases} e^{-2\gamma_+ n} & \text{при } n \geqslant 1, \\ e^{-2\gamma_- n} & \text{при } n \leqslant -1. \end{cases}$$

Определение 1.2. *Конормальным символом* оператора (1.1) называется пара $\sigma_c^+(D)(p)$, $\sigma_c^-(D)(p)$ операторов с параметром и периодическими коэффициентами:

$$\sigma_c^\pm(D)(p)=\sum_k D_k^\pm(p)e^{ikp}\colon H^s(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N)\longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N), \tag{1.3}$$

где $D_k^\pm(p)=D_k(x,\pm\infty,-i\partial_x,p)$.

Определение 1.3. Оператор (1.1) называется *эллиптическим*, если

1) оператор (1.2) обратим при всех $(x,t,\xi,p)\in T_0^*M$;

2) операторы с параметром (1.3) обратимы на весовых прямых $L_{\gamma^\pm}=\{p\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}p=\gamma^\pm\}$.

Из эллиптичности оператора (1.1) следует его фредгольмовость.

Далее используются следующие обозначения:

- σ — внутренний символ оператора (1.1) (см. (1.2));
- $\sigma_c^\pm$ — конормальные символы оператора (1.1) на плюс и минус бесконечности (см. (1.3));
- $M_0=\mathbb{S}^1\times[0,2\pi]\subset M$ — фундаментальная область действия группы $\mathbb{Z}$ на M;
- $\Omega^*\big(S^*M_0,\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N)\big)$ — алгебра дифференциальных форм на косферическом расслоении $S^*M_0\subset S^*M$ со значениями в алгебре ограниченных операторов в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N$;
- d — продолжение внешнего дифференциала на S^*M_0 на указанную алгебру дифференциальных форм.

Определим функционал

$$\tau_{S^*M}\colon \Omega^*\big(S^*M_0,\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z},\mu)\otimes\mathbb{C}^N)\big)\longrightarrow\mathbb{C},\quad \omega\longmapsto\int_{S^*M_0}\operatorname{Tr}\omega,$$

где Tr — операторный след, определённый на идеале форм со значениями в ядерных операторах.

Определение 1.4. *Полным символом* семейства $\sigma_c^+(p)$ называется функция

$$\widetilde{\sigma}(\sigma_c^+)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\sigma}(D_k^+)z^k\in\operatorname{Mat}_N\left(C^\infty\big(\mathbb{S}^1_\varphi,S_\rho(\mathbb{S}^1_x\times\mathbb{R}^2_{\xi,\rho})\big)\right),$$

где $\widetilde{\sigma}(D_k^+)$ — полный символ семейства $D_k^+(p)$, $z=e^{i\varphi}\in\mathbb{S}^1_\varphi$, а $S_\rho(\mathbb{S}^1_x\times\mathbb{R}^2_{\xi,\rho})$ — пространство Фреше классических символов с параметром.

Определим функционал $\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}$ на алгебре $\operatorname{Mat}_N(C^\infty(\mathbb{S}^1,S_\rho(\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^2)))$:

$$\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}(\widetilde{\sigma})=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\operatorname{tr}\left(\int_0^{2\pi}\sigma_{-1}\Big|_{\rho=-1}^{\rho=1}d\varphi\right)dxd\xi,$$

где $\widetilde{\sigma}=\widetilde{\sigma}(\sigma_c^+)$, $\sigma_j=\widetilde{\sigma}_j(\sigma_c^+)$ — j-ая компонента полного символа конормального символа σ_c^+. Аналогичные обозначения вводятся для семейства σ_c^-.

Определение 1.5. *η-инвариантом* эллиптического семейства $\sigma_c(p)$ вида (1.3), обратимого при $\operatorname{Im} p = \gamma$, называется число

$$\eta_\gamma(\sigma_c) = \frac{1}{2\pi i} ⨍_{\mathbb{R}} \operatorname{TR}\Big(\sigma_c^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\rho \sigma_c(\rho+i\gamma) - i\gamma\partial_\rho\big(\sigma_c^{-1}(\rho+i\gamma)\partial_\rho\sigma_c(\rho+i\gamma)\big)\Big)d\rho,$$

где TR — регуляризованный след (см. [2, §5]), а $⨍_{\mathbb{R}}$ — регуляризованный интеграл (см. [2, §6]) в случае 2π-периодических функций.

В терминах введённых выше функционалов предъявляется формула индекса — основной результат работы:

Теорема 1.6. *Индекс эллиптического оператора* (1.1) *равен*

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}^{\gamma^-,\gamma^+} D = \frac{1}{24\pi^2}\tau_{S^*M}\big((\sigma^{-1}d\sigma)^3\big) + \eta_{\gamma^+}(\sigma_c^+) - \eta_{\gamma^-}(\sigma_c^-) + \\ + \frac{1}{4\pi^2 i}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\frac{i}{2}\sigma_-^{-1}\partial_\xi\sigma_-\sigma_-^{-1}\partial_x\sigma_- + \sigma_-^{-1}\sigma_{m-1,-}\right) - \\ - \frac{1}{4\pi^2 i}\tau_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}\left(\frac{i}{2}\sigma_+^{-1}\partial_\xi\sigma_+\sigma_+^{-1}\partial_x\sigma_+ + \sigma_+^{-1}\sigma_{m-1,+}\right),\end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\sigma_\pm = \widetilde{\sigma}_m(\sigma_c^\pm)$ — главные символы семейств с параметром $\sigma_c^\pm$, а $\sigma_{m-1,\pm}$ — компоненты степени $m-1$ полных символов семейств с параметром $\sigma_c^\pm$.

1.2 Эта-инварианты для операторов с параметром, ассоциированных с действием дискретной группы

В работе исследуются эта-инварианты для класса нелокальных операторов с параметром, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы степенного роста на гладком замкнутом многообразии. Эта-инвариант определяется как регуляризация числа вращения. Получена формула для вариации эта-инварианта при изменении оператора — основной результат работы. Результаты основаны на исследовании асимптотических разложений следов нелокальных операторов с параметром и обобщают результаты из [2].

Результаты работы опубликованы в статье [3].

Пусть X — гладкое замкнутое риманово многообразие, а Γ — подгруппа группы изометрий многообразия X. Будем предполагать, что Γ является группой полиномиального роста в смысле Громова.

Через $\Psi_p(X) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \Psi_p^m(X)$ обозначим алгебру классических псевдодифференциальных операторов (ПДО) с параметром $p \in \mathbb{R}$, фильтрованную порядками.

Через $\Phi_p^m(X,\Gamma)$ обозначим пространство операторов с параметром

$$D(p) = \sum_{(\gamma,k)\in\Gamma\times\mathbb{Z}} D_{\gamma,k}(p)T_\gamma e^{2\pi i k p} \colon C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X), \quad (1.5)$$

где $D_{\gamma,k} \in \Psi_p^m(X)$, а $T_\gamma u(x,p) = u(\gamma^{-1}(x),p)$ — представление группы Γ операторами сдвига, индуцированное действием на X. Введём обозначение $\Phi_p(X,\Gamma) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \Phi_p^m(X,\Gamma)$.

Действие группы Γ на X продолжается до действия группы на алгебре $C^\infty\big(S(T^*X\oplus\mathbb{R})\times\mathbb{S}^1\big)$, где $S(T^*X\oplus\mathbb{R})$ — сферическое расслоение векторного расслоения $T^*X\oplus\mathbb{R}$, автоморфизмами. Указанному действию сопоставим гладкое скрещенное произведение, обозначаемое через $C^\infty\big(S(T^*X\oplus\mathbb{R})\times\mathbb{S}^1\big)\rtimes\Gamma$. Напомним, что элементами гладкого скрещенного произведения являются функции $f(\gamma)$ на группе Γ со значениями в алгебре

$C^\infty\big(S(T^*X\oplus\mathbb{R})\times\mathbb{S}^1\big)$, которые быстро убывают, а именно, для любой полунормы $\|\cdot\|_j$ на алгебре $C^\infty\big(S(T^*X\oplus\mathbb{R})\times\mathbb{S}^1\big)$ и числа $N>1$ существует такая константа $C_{N,j}$, что выполнена оценка

$$\|f(\gamma)\|_j\leqslant C_{N,j}(1+|\gamma|)^{-N}.$$

Определение 1.7. Определим отображение

$$\begin{gathered}\overline{\sigma}_{\rm pr}\colon \Phi_p^m(X,\Gamma)\longrightarrow C^\infty\big(S(T^*X\oplus\mathbb{R})\times\mathbb{S}^1\big)\rtimes\Gamma,\\ D(p)=\sum_{(\gamma,k)\in\Gamma\times\mathbb{Z}}D_{\gamma,k}(p)T_\gamma e^{2\pi ikp}\longmapsto\overline{\sigma}_{\rm pr}(D(p))(\gamma)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_{\rm pr}(D_{\gamma,k})(x,\xi,p)z^k,\end{gathered}\tag{1.6}$$

где $\sigma_{\rm pr}:\Psi_p^m(X)\to C^\infty(S(T^*X\oplus\mathbb{R}))$ — отображение взятия главного символа семейства с параметром, а $z=e^{i\varphi}$. Функция $\overline{\sigma}_{\rm pr}(D(p))(\gamma)\in C^\infty\big(S(T^*X\oplus\mathbb{R})\times\mathbb{S}^1\big)\rtimes\Gamma$ называется *главным символом* оператора с параметром $D(p)$.

Справедлив следующий критерий обратимости.

Замечание 1.8. Семейство (1.5) имеет обратное семейство

$$D(p)^{-1}\in\Phi_p^m(X,\Gamma)$$

тогда и только тогда, когда оно эллиптично (т.е. существует обратный главный символ $\overline{\sigma}_{\rm pr}(D(p))^{-1}\in C^\infty\big(S(T^*X\oplus\mathbb{R})\times\mathbb{S}^1\big)\rtimes\Gamma)$ и семейство $D(p)\colon H^s(X)\to H^{s-m}(X)$ обратимо при всех $p\in\mathbb{R}$. Аналогично определяется полный символ семейства (1.5).

Для изометрии $\gamma\colon X\to X$, $\gamma\in\Gamma$, множество неподвижных точек, обозначаемое через X^γ, является гладким подмногообразием в X коразмерности ν. Более того, в окрестности произвольной точки $m\in X^\gamma$ можно выбрать такие локальные координаты (x',x''), что подмногообразие X^γ локально определяется уравнениями $x'=0$, а диффеоморфизм γ определяется формулой

$$\gamma(x',x'')=(gx',x''),$$

где ортогональная матрица $g\in O(\nu)$ не имеет собственного значения равного единице. Далее предположим, что в координатах x' ортогональная матрица g имеет канонический вид, т.е. представляет собой прямую сумму вращений в двумерных плоскостях на углы $\varphi_j\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ и r одномерных отражений.

Предложение 1.9. *Пусть $\gamma\in\Gamma$, $D\in\Psi_p^k(X)$, $k<-\dim X$. Тогда оператор $T_\gamma D$ является ядерным и его след имеет асимптотику*

$$\operatorname{tr}(T_\gamma D(p))\sim p^{k+n-\nu}\big(c_0^\pm+c_1^\pm p^{-1}+\cdots\big)\quad \textit{при } p\to\pm\infty,$$

которую можно дифференцировать.

Определим регуляризованный след TR и регуляризованный интеграл $⨍$ аналогично [2, §5 и §6]. Через $\operatorname{Tr}\colon\Phi_p(X,\Gamma)\to\mathbb{C}$ обозначим функционал, определяемый формулой

$$\operatorname{Tr}D\stackrel{\rm def}{=}⨍_{\mathbb{R}}\operatorname{TR}D(p)dp.$$

Из предложения 1.9 следует, что след Tr корректно определен.

Определение 1.10. Пусть $D(p) \in \Phi_p^m(X,\Gamma)$ — обратимый элемент, т.е. существует обратный элемент $D^{-1}(p) \in \Phi_p^{-m}(X,\Gamma)$. Тогда число

$$\eta(D) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Tr}\left(D^{-1}\partial_p D\right) \tag{1.7}$$

называется *η-инвариантом* элемента $D(p)$.

Теорема 1.11 (Свойства η-инварианта).

1) *η-инвариант* (1.7) *удовлетворяет логарифмическому свойству:*

$$\eta(AB) = \eta(A) + \eta(B)$$

для любых обратимых элементов $A, B \in \Phi_p(X,\Gamma)$;

2) *η-инвариант* (1.7) *является обобщением η-инварианта Мельроуза, а именно, если $D(p) \in \Psi_p(X)$ — обратимый ПДО с параметром, то*

$$\eta(D) = \frac{1}{2\pi i} \fint_{\mathbb{R}} \left(\int_0^p \int_0^{p_l - 1} \cdots \int_0^{p_1} \operatorname{tr}\left((\partial_q)^l \left(D^{-1}\partial_q D\right)\right) dq dp_1 \dots dp_{l-1} \right) dp.$$

3) *Формальный след $\widetilde{\operatorname{Tr}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Tr} \circ \partial_p$ является следом на алгебре $\Phi_p(X,\Gamma)$, т.е. $\widetilde{\operatorname{Tr}}(AB) = \widetilde{\operatorname{Tr}}(BA)$;*

4) *Пусть $D_t(p) \in \Phi_p^m(X,\Gamma)$, $t \in [0,1]$ — гладкая гомотопия семейств обратимых операторов с параметром. Тогда производная η-инварианта семейства D_t по параметру t равна*

$$\partial_t \eta(D_t) = \frac{1}{2\pi i} \widetilde{\operatorname{Tr}}\big(D_t^{-1}\partial_t D_t\big). \tag{1.8}$$

Для формального символа имеет место следующая формула в терминах полного символа соответствующего семейства — основной результат работы.

Теорема 1.12. *Для оператора с параметром $D(p)$ имеет место выражение*

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\big(T_\gamma D(p)\big) = \frac{(2\pi)^{\nu-n}}{2^\nu \prod_j \sin^2(\varphi_j/2)} \int_{T^*X^\gamma} \left[e^{\mathcal{P}} \sigma(D)(0,x'',0,\xi'',p)\right]_{-n+\nu} \Bigg|_{p=-1}^{p=1} \frac{\omega''^{(n-\nu)}}{(n-\nu)!},$$

где $\mathcal{P} = i\big((g-1)^{-1}\partial_{\xi'}, \partial_{x'}\big)$ — дифференциальный оператор второго порядка, $\omega'' = \sum_j dx''_j \wedge d\xi''_j$ — симплектическая форма на T^*X^γ. Далее, имеем

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\big(T_\gamma D(p) e^{2\pi i k p}\big) = 0 \quad \text{для всех} \quad k \neq 0.$$

2 Опубликованные и поданные в печать работы.

[1] K.N. Zhuikov. Index of Differential-Difference Operators on an Infinite Cylinder. *Russ. J. Math. Phys.*, 29(2): 280–290 (2022).
DOI:10.1134/S1061920822020091

[2] К. Н. Жуйков, А. Ю. Савин. Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами. *Уфимск. матем. журн.*, 14(2): 37–57 (2022);
K.N. Zhuikov, A.Yu. Savin. Eta-invariant for parameter-dependent families with periodic coefficients. *Ufa Math. J.*, 14(2): 35–55 (2022).
DOI:10.13108/2022-14-2-35

[3] К.Н. Жуйков, А.Ю. Савин. Эта-инварианты для операторов с параметром, ассоциированных с действием дискретной группы. *Матем. заметки*, 112 (5): 705–717 (2022).
DOI:10.4213/mzm13778;
K.N. Zhuikov, A.Yu. Savin. Eta-Invariants for Parameter-Dependent Operators Associated with an Action of a Discrete Group. *Math. Notes*, 112(5): 685–696 (2022).
DOI:10.1134/S0001434622110062 — in print

3 Участие в конференциях и школах.

1) Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2022», 11.04–22.04, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова.

2) Международная Воронежская весенняя математическая школа (ВВМШ-2022), 03.05–09.05, Воронеж, ВГУ.

3) The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations (DFDE-2022), 28.06–5.07, Москва, РУДН.

4) Twelfth International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis XII» (OTHA-2022), 21.08–26.08, Ростов-на-Дону, ЮФУ.

5) Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа — 2022» (УОМШ-2022), 28.09-1.10, Уфа, БашГУ.

4 Работа в научных центрах и международных группах.

Аспирант полного дня Математического института им. С.М. Никольского РУДН. Также занимаю должность стажера–исследователя Математического института им. С.М. Никольского РУДН.

5 Педагогическая деятельность.

В качестве ассистента Математического института им. С.М. Никольского РУДН вел семинарские занятия по дисциплинам Линейная алгебра и геометрия, Дифференциальные уравнения, Методы оптимизации, Математика.