

Геометрические свойства мер и динамические системы

Лектор — к.ф.-м.н. А.А. Приходько

Курс будет читаться параллельно в НМУ, в форме миникурса из 4 лекций, и на мех-мате МГУ им. М.В. Ломоносова в форме полугодового спецкурса

Динамические системы являются источником множества примеров вероятностных распределений (мер) на многообразиях и топологических группах, в том числе мер, обладающих экзотическими геометрическими свойствами. Хорошо известны два механизма возникновения нетривиальных примеров распределений, связанных с динамической системой: это I) инвариантные меры и II) спектральные меры ассоциированного с динамической системой унитарного представления. В нашем курсе мы рассмотрим наиболее простые конструкции обоих типов и особенно внимательно рассмотрим второй механизм.

Курс является вводным к предстоящему курсу профессора университета Руана (Франция) Эль Х. Абдалауи (LMRS) на тему “Спектральная теория систем ранга один”. В программу наших миникурсов включено обсуждение открытых вопросов в данной области.

ПРОГРАММА КУРСА

1. Спектральные инварианты динамических систем — вводная лекция, в которой будет дан краткий обзор основных конструкций и теорем спектральной теории действий групп с инвариантной мерой, необходимых для понимания материала курсов: Меры на прямой \mathbb{R} и в пространстве \mathbb{R}^n . Борелевские меры на топологических группах и их преобразования Фурье. Сингулярность и абсолютная непрерывность. Унитарное представление, связанное с динамической системой. Гауссовские динамические системы.

2. Задачи классического анализа, связанные с исследованием свойств борелевских мер. Теорема Римана–Лебега. Конструкции сингулярных мер. Произведения Рисса. Меры Миньшова–Райхмана. Функция и распределение Минковского. Проблема Салема. Иллюстрации к вопросу о взаимосвязи статистических свойств динамических систем и свойств спектральных мер. Динамические системы с дискретным спектром. Действия со свойством быстрого убыванием корреляций.

3. Меры, энтропия и размерность. Инвариантные меры динамических систем. Фракталы. Хаусдорфова размерность множеств и мер. Топологическая и метрическая энтропия. Мультипликативная эргодическая теорема Оселедца.

4. Символические динамические системы. Аппроксимационный ранг. Системы конечного ранга (энтропия, сложность, статистические свойства). Подходы к вычислению спектральных мер систем конечного ранга и приложения к задачам анализа. Меры Салема: результаты и открытые вопросы.