Алгоритмы распознавания реализуемости графов и гиперграфов
спецкурс проф. А.Б. Скопенкова

Аннотация

Хорошо известно, что существует быстрый (точнее – линейный) алгоритм, определяющий, вложим ли данный граф в плоскость, т.е., можно ли граф расположить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались и не самопересекались. Мы рассмотрим аналогичную задачу для гиперграфов в пространствах произвольной размерности: как распознать вложимость n-мерного гиперграфа в m-мерное пространство? Теория гиперграфов — раздел математики, возникший на стыке комбинаторики, топологии и программирования, бурно развивающийся в последнее время.

Основное содержание курса — *алгоритмически мотивированное введение в алгебраическую топологию*. Венец курса — следующие результаты.

• При $2m \geq 3n + 3$ имеется полиномиальный алгоритм распознавания вложимости n-мерного гиперграфа в m-мерное пространство;

• При $2m < 3n + 3$ указанная проблема распознавания вложимости является NP-трудной (таким образом, скорее всего, быстрых алгоритмов для ее решения не существует).

Они получены ок. 2010 года школой Ю. Матушека с использованием применений алгебраической топологии в теории вложений.

Все необходимые определения (гиперграф, вложимость, NP-трудность и т.д.) будут даны. Основные идеи будут представлены на 'олимпиадных' примерах: размерности не выше 3, на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. Поэтому для изучения курса достаточно владения основами теории графов. В то же время для тех, кто уже изучал алгебраическую топологию, ее применение к конкретным задачам обычно оказывается нетривиальным и интересным.

Каждое следующее занятие будет рассчитано на тех, кто решил простые задачи на понимание предыдущего. Курс будет разбит на два модуля, за первый из которых можно получить половину кредита, а второй из которых рассчитан на тех, кто сдал первый. Будут предложены красивые задачи для исследования.

Литература: [1, 2, BE, SS, S16'] из
`http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#refere`

Примерная программа (некоторые первые или некоторые последние пункты могут быть опущены в зависимости от уровня и желания слушателей)

1. Линейные вложения графов. Гомеоморфность и кусочно-линейные вложения графов. Алгоритм Фари распознавания планарности графов.

2. Определения и примеры двумерных утолщений графов. Критерии планарности утолщений и их реализуемости в сфере с ручками. Алгоритмы распознавания планарности и нахождения рода графа.

3. Алгоритм Ван Кампена распознавания планарности графов. Конфигурационные пространства и планарность.

4. Устойчивость самопересечений путей на плоскости: определение, примеры и простейшие результаты. Алгоритм Ван Кампена распознавания устойчивости самопересечений пути на плоскости.

7. Линейные вложения двумерных гиперграфов (симплициальных комплексов) на языке систем точек. Рамсеевская теория зацеплений для линейных вложений. Примеры двумерных гиперграфов, не реализуемых в четырехмерном пространстве: полный двумерный гиперграф на 7 вершинах (т.е. двумерный остов 6-симплекса) и декартово произведение $K_5 \times K_5$ (решение проблемы Менгера).

8. Рамсеевская теория зацеплений. Построение колец Борромео при помощи тора и коммутатора.

9. Определения гиперграфа (симплициального комплекса), линейного и кусочно-линейного вложений в n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$. Теорема общего положения.

10. Планарность двумерных гиперграфов: теоремы Куратовского и Халина-Юнга. Вложимость двумерных гиперграфов в трехмерное пространство: примеры. Определение класса NP и NP-трудности. Формулировки алгоритмических результатов о вложимости двумерных гиперграфов.

11. Полиномиальный алгоритм Ван Кампена распознавания вложимости n-мерных гиперграфов в m-мерное пространство $\mathbb{R}^m$ для $m = 2n \geq 6$. Препятствие взрезанного квадрата. Теория препятствий и алгоритмы распознавания гомотопности отображений. Алгоритмическое распознавание вложимости при $2m \geq 3n + 3$.

12. Пример Фридмана-Крушкаля-Тайхнера неполноты препятствия Ван Кампена к вложимости двумерных гиперграфов в четырехмерное пространство $\mathbb{R}^4$. Его аналог: построение двумерного гиперграфа P_f по формуле f для булевой функции. Критерий вложимости P_f в $\mathbb{R}^4$: $f(\vec{x}) = 0$ для некоторого $\vec{x}$. Вывод из критерия теоремы Матушека-Танцера-Вагнера об NP-трудности проблемы распознавания вложимости двумерных гиперграфов в $\mathbb{R}^4$.