

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТОПОЛОГИИ

СЕМЁН АБРАМЯН

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ. Вычисление стабильных гомотопических групп сфер было одной из главных задач алгебраической топологии второй половины двадцатого века. Целью курса является знакомство слушателей с классическими достижениями в этой области: метод Серра вычисления гомотопических групп с помощью Стинродовых операций, спектральная последовательность Адамса. По пути мы обсудим когомологические операции, спектральные последовательности расслоения и их применения в теории гомотопий.

Если позволит время, мы обсудим другое важное применение спектральной последовательности Адамса — вычисление кольца кобордизмов.

Слушателям будут предложены листки с задачами существенными для дальнейшего понимания.

ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА.

Часть I. КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

- Зачем нужны когомологические операции?
- Когомологические операции как $[K(G, n), K(H, m)]$, или зачем считать когомологии $H^*(K(G, n), H)$.
- Определенные и основные свойства операций и квадратов Стинрода.
- Алгебра Стинрода.

Часть II. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Что такое спектральная последовательность и зачем она вообще нужна?
- Спектральная последовательность фильтрованного комплекса. Точные пары.
- Спектральная последовательность расслоения. Теорема Лере-Серра.
- Мультипликативная структура когомологической спектральной последовательности.

Часть III. ВЫЧИСЛЕНИЯ

- Кольцо когомологий $H^*(U(n))$, $H^*(BU(n))$. Характеристические классы.
- Несколько точных последовательностей: последовательности Серра, Гизина, Вана.
- Классы Серра. Теоремы Гуревича и Уайтхеда mod \mathcal{C} .
- Теорема Бореля. Когомологии $H^*(K(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p)$ и $H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_p)$.
- Метод Серра вычисления гомотопических групп сфер.
Кручение в гомотопических группах сфер.

Часть IV. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ АДАМСА

- Какую задачу хотим решить? набросок конструкции.
- Зачем нужны спектры? «Пространства» со свободными над алгеброй Стинрода когомологиями.
- Теорема Брауна о представимости. Примеры экстраординарных теорий когомологий: K -теория, кобордизмы (без доказательства).
- Резольвенты отображений.
- Конструкция спектральной последовательности Адамса.
- Основная теорема.
- Применения: стабильные гомотопические группы сфер.

(Если позволит время)

Часть V. ДРУГОЕ ПРИМЕНЕНИЕ: КОБОРДИЗМЫ

- Теорема Понтрягина-Тома. Спектр Тома.
- Гомотопические группы спектра Тома, теорема Милнора-Новикова.
- Мультипликативная структура Ω_U^* . Формальные группы.

ПРЕРЕКВИЗИТЫ. Курс рассчитан на студентов 2-5 курса, изучивших основы алгебраической топологии в объёме курсов Топология, Топология-2 и владеющих началами теории категорий.