

# Семинар

## К-стабильность многообразий Фано

Алексей Голота, Константин Логинов

Среди всех алгебраических многообразий можно выделить 3 больших класса: многообразия Фано, многообразия Калаби-Яу и многообразия общего типа. В размерности 1 над полем комплексных чисел это приводит к следующей трихотомии: сфера, эллиптическая кривая, и риманова поверхность с  $g \geq 2$  ручками. Хорошо известно, что на таких поверхностях существуют метрики постоянной положительной, нулевой и отрицательной кривизны соответственно. Обобщением этого наблюдения в высших размерностях являются теоремы Яу и Обана, которые гарантируют существование метрики Кэлера-Эйнштейна (то есть такой метрики, что ее кривизна Риччи ей пропорциональна) на многообразиях Калаби-Яу и общего типа, соответственно. Для многообразий Фано ситуация оказывается более сложной: согласно результатам Дональдсона-Чена-Суна и Тиана существует алгебраическое препятствие к существованию метрики Кэлера-Эйнштейна. Оно называется К-стабильность.

В последние годы вопросы, связанные с К-стабильностью, привлекли внимание многих исследователей. Свойство многообразия Фано быть К-стабильным тесно связано с его геометрией. Более того, благодаря валлюативному критерию Фуджиты-Ли проверять К-стабильность можно в терминах численных инвариантов дивизоров над данным многообразием. К-стабильность может быть определена не только для гладких, но и для особых многообразий Фано. Главным образом рассматривают многообразия с  $\text{klf}$  особенностями, то есть такими особенностями, которые естественно возникают в программе минимальных моделей. Еще одним обобщением является случай лог Фано пар, то есть многообразия с дивизором границы. Важным приложением К-стабильности является то, что для К-(полу)стабильных многообразий Фано существует пространство модулей с достаточно хорошими свойствами.

Многообразия Фано замечательны тем, что для них (гладких или с ограниченными особенностями) в фиксированной размерности имеется лишь конечное число деформационных семейств. Классификация гладких многообразий Фано имеется в размерности не выше трех. Это доставляет множество конкретных примеров для изучения К-стабильности. Мы планируем сосредоточиться на таких примерах и на геометрических приложениях.

Семинар рассчитан на студентов и аспирантов, интересующихся алгебраической геометрией. От них ожидается знакомство с этой наукой, а также с основными понятиями бирациональной геометрии.

### ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА

- (i) Определение К-стабильности в терминах однопараметрических деформаций. Примеры дестабилизирующих семейств.
- (ii) Связь с альфа- и дельта-инвариантами (по работам Тиана-Фуджиты-Одака-Сано).

- (iii) Валюативный критерий  $K$ -стабильности (Фуджита-Ли).
- (iv) Связь с существованием пространств модулей и ГИТ-стабильностью. Случай трехмерной кубики.
- (v) Нормализованный объем и компонента Коллара.
- (vi) Индуктивный подход. Теория Аббана-Жуанга.
- (vii) Эквивариантная  $K$ -стабильность (Жуанг).
- (viii)  $K$ -стабильность трехмерных многообразий Фано.
- (ix)  $K$ -стабильность для асимптотических многообразий Фано и многообразий лог Фано типа Маеды.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [AZ20] H. Abban, Z. Zhuang, *Stability of Fano varieties via admissible flags*. preprint, arXiv:2003.13788, 2020.
- [ACC<sup>+</sup>] C. Araujo, A.-M. Castravet, I. Cheltsov, K. Fujita, A.-S. Kaloghiros, J. Martinez-Garcia, C. Shramov, H. Süß, N. Viswanathan. *The Calabi problem for Fano threefolds*. MPIM preprint, 2021.
- [CDS15] X.-X. Chen, S. K. Donaldson and S. Sun. *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, I-III*. J. Amer. Math. Soc. 28, 183–197, 199–234, 235–278 (2015).
- [Fu19] K. Fujita. *A valuative criterion for uniform  $K$ -stability of  $Q$ -Fano varieties*. J. Reine Angew. Math. 751, 309–338 (2019).
- [IP99] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov. *Fano Varieties, Algebraic Geometry V*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 47, 1999.
- [KM98] J. Kollár, Sh. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*. Cambridge tracts in mathematics (1998).
- [Laz04] R. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. (3) 48, Springer, Berlin, 2004.
- [Li17] C. Li.  *$K$ -semistability is equivariant volume minimization*. Duke Math. J. 166, no. 16, 3147–3218 (2017).
- [Tia97] G. Tian. *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature*. Invent. Math. 130, no. 1, 1–37 (1997).
- [Xu21] C. Xu  *$K$ -stability of Fano varieties: an algebro-geometric approach*. EMS Surveys in Mathematical Sciences, vol. 8 1/2, 265–354 (2021).
- [Zhu20a] Z. Zhuang. *Optimal destabilizing centers and equivariant  $K$ -stability*. arXiv:2004.09413, 2020.